Chapitre 4 : Suites -11-10-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Définition et exemples

Une *suite numérique* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou sur les entiers $n \geqslant n_0$: $(u_n)_{n\geqslant n_0}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'image de n par la suite u se note $u(n) = u_n$, on l'appelle le *terme* numéro n de la suite. Le nombre n est l'*indice* ou le *rang* du terme u_n.

Remarque. On note traditionnellement la variable d'une suite n (ou m, p, q) et on réserve le x ou le t pour les variables de fonctions définies sur des intervalles.
La suite est notée entre paranthèses $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un terme de la suite, sans paranthèse : u_n. (il s'agit de la même distinction qu'entre les notations f et $f(x)$).
⚠ une suite n'est pas dérivable : pour être dérivable, une fonction doit être définie sur un intervalle.

Exemples de suites explicites

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n^2$.
$u_0 =$ $u_1 =$ $u_2 =$ $u_n + 1 =$ $u_{n+1} =$
• Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n$.
$v_0 =$ $v_1 =$ $v_2 =$ $v_{2n} =$ $u_{2n+1} =$

Exemple de suites définies par récurrence

Une suite est définie par *récurrence* lorsqu'on en donne un ou plusieurs termes initaux et une relation qui permet de définir un terme en fonction du ou des termes précédents :
• Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} = w_n - 2$.
$w_1 =$ $w_2 =$ $w_3 =$ $w_4 =$ $w_n =$

Raisonnement par récurrence

En définissant le premier terme d'une suite et l'expression générale d'un terme en fonction du terme précédent, on définit par récurrence la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut utiliser cette méthode pour des démonstrations :

Une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ si
$\star$ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (initialisation).
$\star$ si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. (transmission : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$).

Exemple. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [0; 3]$ » est vraie.
$\star$ initialisation $u_0 = 0 \in [0; 3]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
$\star$ transmission : on suppose que $\mathcal{P}_n : u_n \in [0; 3]$ est vraie. Donc :
$0 \leqslant u_n \leqslant 3$ d'où $6 \leqslant 6 + u_n \leqslant 9$ donc $0 \leqslant \sqrt{6} \leqslant \sqrt{6 + u_n} \leqslant \sqrt{9} = 3$ car la fonction racine carrée est croissante. Par conséquent $u_{n+1} \in [0; 3]$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
$\star$ conclusion : on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 3]$.

Exemple. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + ... + n = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. Sens de variation d'une suite

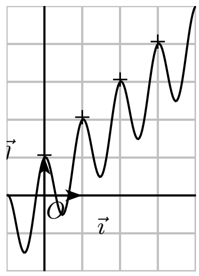
Définition. Une suite (u_n) est *strictement croissante* à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$ si et seulement si pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
Une suite (u_n) est *strictement décroissante* à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$ si et seulement si pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.
Une suite (u_n) est *constante* à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$ si et seulement si pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
On définit une suite *croissante* ou *décroissante* de même, avec des inégalités larges.

Méthode : montrer qu'une suite est strictement croissante

La suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ est strictement croissante à partir du rang n_0 si
- $\star$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
- $\star$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
- $\star$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n = f(n)$ et f strictement croissante sur $[n_0, +\infty[$.

Preuve. Pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n$.
Si $u_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n$
Si $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, et $f \nearrow$ sur $[n_0, +\infty[$, alors $f(n+1) > f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$.

Exemple. Le dernier critère n'admet pas de réciproque : il se peut que $u_n = f(n)$ où f n'est pas croissante sur $[0, +\infty[$ mais que u soit strictement croissante. Par exemple, soit (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \cos(2\pi x)$. La courbe de f est représentée ci-contre. Que dire de f ? ....
Simplifier et en déduire le sens de variation de (a_n) :
$a_n =$ ....



Remarque. Des critère analogues existent pour montrer qu'une suite est décroissante ! (par exemple, (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n)

Remarque. Il n'y a pas de règle pour le choix des critères, mais l'étude d'une suite explicite passera souvent par l'étude de la fonction associée (critère 3), une suite définie à partir de sommes et de différences s'étudiera bien avec le critère 1 et une suite définie avec des quotients ou des produits s'étudiera plutôt par le critère 2.

Exemple. Sens de variation de (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? ....
....
....
....
Sens de variation de (b_n) définie par $b_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? ....
....
....
Sens de variation de (u_n) définie par $u_n = 2n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? ....
....
....
....
....
....

3. Limites de suite

On n'étudie la limite d'une suite qu'en $+\infty$. Les théorèmes valables pour les fonctions (tableaux d'opérations, limites usuelles, encadrement...) restent valables dans le cadre des suites. Une suite est *convergente* lorsque elle a pour limite un réel ℓ. Elle est dite *divergente* sinon (lorsque sa limite est infinie ou n'existe pas).

Une limite utile : $$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } q \in]-1;1[& \textbf{ex. } \lim\limits_{n\to+\infty}(-0,5)^n = 0 \\ +\infty & \text{si } q > 1 & \textbf{ex. } \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leqslant -1 & \textbf{ex. } \lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n \text{ n'existe pas} \\ 1 & \text{si } q = 1 & \textbf{ex. } \lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1 \end{cases}$$

4. Suites bornées

Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *majorée* (par un réel M) lorsque pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant M$.
Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *minorée* (par un réel m) lorsque pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant m$.
Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *bornée* lorsque elle est à la fois majorée et minorée. (ce qui équivaut à $|u_n| \leqslant M$ pour tout entier $n \geqslant n_0$)

Exemple. Montrer qu'une suite est bornée par étude de fonction : $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
....
....
....

Exemple. Montrer qu'une suite est bornée par encadrement : $v_n = 2(-1)^n + \sin(n^2)$. pour tout $n \in \mathbb{N}$. ....
....
....
....

Exemple. Montrer qu'une suite est bornée par récurrence : $w_0 = 2$ et $w_n = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{1}{w_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (montrer que $w_n \in [1;2]$). ....
....
....

Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$, puis que (u_n) converge vers une limite ℓ. En déduire $\ell = \sqrt{\ell + 2}$. Déterminer ℓ. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
.

5. Suites particulières

Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* de raison r et de premier terme u_0 si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n \Longleftrightarrow u_{n+1} = r + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La somme des termes d'une suite arithmétique de raison r est $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k = \frac{u_p + u_q}{2} \times (q+1-p)$.

(produit de la moyenne des deux termes extrêmes et du nombre total de termes)

Exemple. Montrer que la somme des n premiers nombres impairs est un carré. ....
....
....

Suites géométriques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* de raison r et de premier terme u_0 si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times r^n \Longleftrightarrow u_{n+1} = r \times u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$ est $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k = \frac{u_p - u_{q+1}}{1-r}$.

(différence entre le premier terme et le terme qui suit le dernier terme divisée par $1 - r$)

Exemple. Exprimer en fonction de n : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. .....
....
....

6. Suites adjacentes

Les suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si et seulement si :
⋆ (u_n) est croissante.
⋆ (v_n) est décroissante.
⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Théorème. Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.
De plus $u_n \leqslant \ell \leqslant v_m$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Preuve. On considère (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.
Comme (v_n) décroît, $v_{n+1} \leqslant v_n$ et comme (u_n) croît, $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par différence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$, donc la suite $(v_n - u_n)$ décroit vers 0 : ses termes son nécessairement positifs $v_n - u_n \geqslant 0$, d'où pour tout $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ (car (u_n) croît). Ainsi, la suite (v_n) est minorée par u_0 et décroissante par hypothèse, donc converge vers une limite ℓ.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n + v_n = 0 + \ell = \ell$.
Donc les deux suites convergent vers la même limite. □.

Exemple. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En considérant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$, calculer la limite des suites u et v.