Chapitre 3 : Dérivation -28-09-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Le *taux d'accroissement* $\tau_{x_0,h}f$ de f entre $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$ est $\tau_{x_0,h}f = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Si la limite lorsque h tend vers 0 du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}$ existe, la fonction f est dite *dérivable* en x_0. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé* $f'(x_0)$ de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f est $\tau_{x,h}f = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$. La limite lorsque h tend vers 0 de $\tau_{x,h}$ est $f'(x) = 2x$. Voir le dm 3 pour d'autres exemples.

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto\ x\sqrt{x}$ est dérivable en 0. Calculer $g'(0)$. . . . .

. . . .

Remarque. En physique, on notera souvent $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et r une *fonction reste* définie pour tout h vérifiant $x_0 + h \in I$, telle que $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$, et qui satisfont :

$$f(x_0 + h) = b + ha + hr(h) \text{ pour tout } h \text{ tel que } x_0 + h \in I$$

Dans ce cas, $b = f(x_0)$ et $a = f'(x_0)$. L'égalité ci-dessus est le *développement limité d'ordre 1* (DL_1) de f en x_0. Elle équivaut à $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)r(x - x_0)$.

Preuve. On montre les deux implications de l'énoncé :
$\Rightarrow$: soit r définie pour h tel que $x_0 + h \in I - \{x_0\}$ par $r(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ et par $r(0) = 0$. Comme f dérivable en x_0, de nombre dérivé $f'(x_0)$, la limite de $r(h)$ lorsque h tend vers 0 est 0. Par ailleurs $f(x_0) + hf'(x_0) + hr(h) = f(x_0 + h)$ (exercice : détailler). On a donc prouvé la première implication.
$\Leftarrow$: Si $f(x_0 + h) = b + ha + hr(h)$ avec r vérifiant les propriétés de l'énoncé. En $h = 0$, on obtient : $f(x_0) = b$. Par ailleurs, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{b+ha+hr(h)-b}{h} = a + r(h)$. Donc le taux d'accroissement admet comme limite a lorsque h tend vers 0, ce qui signifie : f dérivable en x_0 de nombre dérivé $f'(x_0) = a$. $\square$

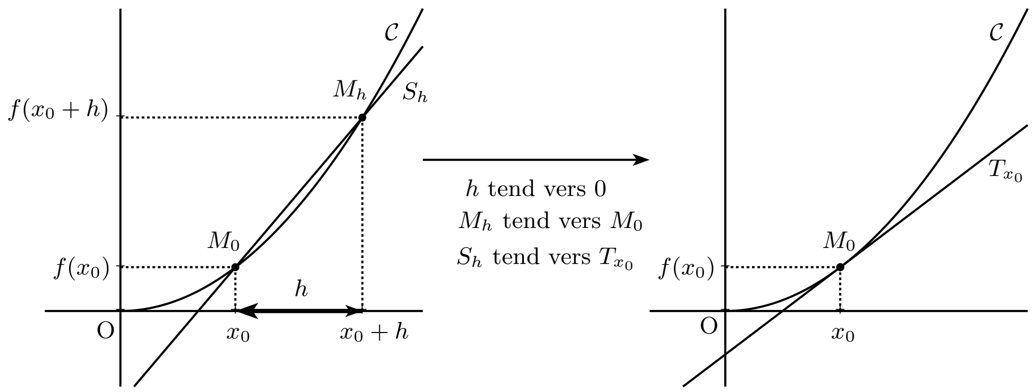
Exemple. Écrire le DL_1 de sin en 0 : . . . .

En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - 0,5x}{x} =$ . . . .

2. Interprétations

Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et M_h le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0 + h$. Le coefficient directeur de la sécante $S_h = (M_0M_h)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est le taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}f$. Lorsque h tend vers 0, la position limite de M_h est celle du point M et la position limite de la sécante S_h est la tangente T_{x_0} à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0. Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$, la limite des coefficients directeurs des sécantes.



Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La *tangente* à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$.

Exemple. Déterminer l'équation de la tangente à la parabole de la fonction carrée au point $(1, 1)$. . . . .
. . . .

Remarque. Si la limite en x_0 du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}f$ est $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet en x_0 une tangente verticale d'équation $x = x_0$.

Exemple. Montrer que la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale à l'origine. . . . . . .
. . . .

Interprétation cinétique

Soit $x(t)$ la position d'un mobile en mouvement rectiligne sur un axe gradué, en fonction du temps t. Le taux d'accroissement $\tau_{t_0,h}x$ représente la *vitesse moyenne* du mobile entre t_0 et $t_0 + h$, alors que $x'(t)$ est la *vitesse instantanée* du mobile au temps t.

Interprétation numérique

Le développement limité d'ordre 1 d'une fonction f au point d'abscisse x permet d'obtenir, pour de petites valeurs de h, une valeur approchée de $f(x + h)$: $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$.

Exemple. Une fonction f vérifie $f(3) = 4$ et $f'(3) = 2$. $f(3, 05) \approx$ . . . .

Exemple. Une fonction g vérifie $g(x) = g'(x)$ et $g(0) = 1$. Estimer $g(0.5)$.

x	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$g(x)$	1										

3. Opérations sur les dérivées

Si f est dérivable pour tout x de l'intervalle I, $f' : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$ est sa *fonction dérivée.*

Opérations usuelles

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors
$\star$ $u+v$ est dérivable sur I de dérivée $(u+v)' = u' + v'$.
$\star$ uv est dérivable sur I de dérivée $(uv)' = u'v + v'u$.
$\star$ ku est dérivable sur I de dérivée $(ku)' = ku'$. (où $k \in \mathbb{R}$)
$\star$ $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x) = 0$, de dérivée $-\frac{v'}{v^2}$.
$\star$ $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x) = 0$, de dérivée $\frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Preuve. On utilise la caractérisation des développements limités d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}(u+v)(x+h) &= u(x+h) + v(x+h) = u(x) + hu'(x) + hr_u(h) + v(x) + hv'(x) + hr_v(h) \\ &= u(x) + v(x) + h(\underbrace{u'(x) + v'(x)}_{(u+v)'(x)}) + h(\underbrace{r_u(h) + r_v(h)}_{r(h)}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u \times v)(x+h) &= u(x+h) \times v(x+h) = \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

La dérivée de ku est un cas particulier de la situation précédente : $v(x) = k$ et $v'(x) = 0$.
La dérivée de $\frac{1}{v}$ est un cas particulier de composition de fonctions.
La dérivée de $\frac{u}{v}$ s'obtient par la formule de dérivée d'un produit appliquée à $u \times \frac{1}{v}$. $\square$.

Exemple. Dérivée de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(x)$. . . . .
. . . .

Composition

Soit deux fonctions dérivables $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$. La fonction *composée* de v et u est $v \circ u : x \in I \xrightarrow{u} u(x) \in J \xrightarrow{v} v(u(x))$. La fonction $v \circ u$ est dérivable de dérivée : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ (donc $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

Preuve. On utilise la caractérisation des développements limités d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}(v \circ u)(x+h) &= v(u(x+h)) = v(\overbrace{u(x)}^{X} + \overbrace{hu'(x) + hr_u(h)}^{H}) \\ &= v(X) + Hv'(X) + Hr_v(H) \\ &= v(u(x)) + (hu'(x) + hr_u(h))v'(u(x)) + (hu'(x) + hr_u(h))r_v(hu'(x) + hr_u(h)) \\ &= v(u(x)) + hu'(x) \times v'(u(x)) + h \times \underbrace{\left(r_u(h)v'(u(x)) + (u'(x) + r_u(h))r_v(hu'(x) + hr_u(h))\right)}_{r(h)}\end{aligned}$$

Exemple. Dérivabilité et dérivée de $f :]-\infty; 3[,\ x \mapsto \sqrt{3-x}$. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exemple. Dérivabilité et dérivée de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x^2)$. . . . .
. . . .
. . . .

4. Applications

Calcul de limites

Lorsqu'on reconnaît le taux d'accroissement d'une fonction dont on a prouvé qu'elle était dérivable et calculé la dérivée, on peut réutiliser directement ce résultat. Ainsi :
$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(x) - 0}{x - 0} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

Exemple. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} =$

Variations

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.
- $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$ (sauf en des points isolés[1]) $\iff f$ est strictement croissante sur $[a, b]$.
- $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$ (sauf en des points isolés) $\iff f$ est strictement décroissante sur $[a, b]$.
- $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$ si et seulement si f est constante sur $[a, b]$.

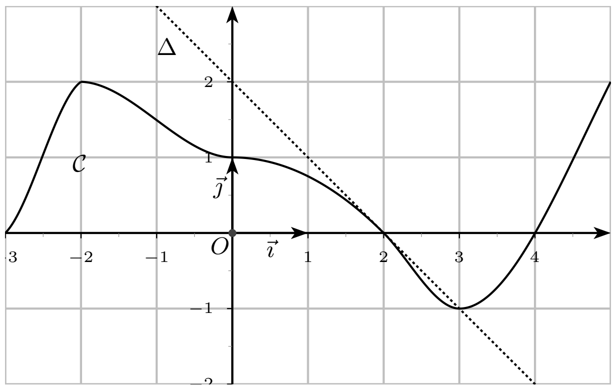
Remarque. ⚠ ce qui suit ne consitute pas une démonstration rigoureuse. La preuve exacte nécessite des connaissances plus pousées sur la topologie des nombre réels.
Si $f'(x) > 0$ sur I, cela signifie que toutes les tangentes à $\mathcal{C}_f$ su r I ont un coefficient directeur strictement positif, donc sont strictement croissantes. En admettant qu'en un voisinage petit de $x \in I$, la courbe et sa tangente sont presques identiques, on peut imaginer que f est strictement croissante au voisinage de chaque $x \in I$, donc sur I.

Exemple. Lecture graphique : $\mathcal{C}$ représente $f : [-3; 5] \to \mathbb{R}$, Δ est tangente à $\mathcal{C}$ en $(2; 0)$.

Calculer $f'(2)$.

Résoudre $f'(x) = 0$.

Résoudre $f'(x) \leqslant 0$.



Extrema

Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ et $x_0 \in]a, b[$.
- si f admet un extremum local (un maximum ou un minimum) en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- si $f'(x_0) = 0$ et $f(x)$ de signe opposé sur $]a, x_0[$ et $]x_0, b[$ alors f admet un extremum local en x_0.

Remarque. En particulier, une fonction définie sur $]a, b[$ admettant un extremum local en $x_0 \in]a, b[$, a une courbe qui admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0. (pas de réciproque)

Exemple. La fonction cube admet-elle un extremum local ? ....
....
Donner une CNS sur a pour que $x \mapsto x^3 + ax + 1$ admette un extremum local. ....
....
....
....

1. c'est-à-dire : on n'a pas $f'(x) = 0$ sur un intervalle ouvert contenu dans $[a, b]$

5. Formulaire

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité	Condition
k	0	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R} : (n \geqslant 0);\ \mathbb{R} - \{0\} : (n < 0)$	$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors,

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité
$u+v$	$u'+v'$	I
uv	$u'v+v'u$	I
ku	ku'	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$

Fonctions composées

Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur les intervalles respectifs I et J.

f	f'	Domaine de validité	Condition
$v \circ u$	$= u' \times v' \circ u$	$u(x) \in J$ pour tout $x \in I$	
u^n	$nu' \times u^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	x tels que $u(x) \neq 0$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	x tels que $u(x) > 0$	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	x tels que $u(x) > 0$	
e^u	$u' \times e^u$	$\mathbb{R}$	
$\cos u$	$-u' \times \sin u$	$\mathbb{R}$	
$\sin u$	$u' \times \cos u$	$\mathbb{R}$	

Exemple

Dérivabilité et dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{(\cos(x)+1)^{10}}$.