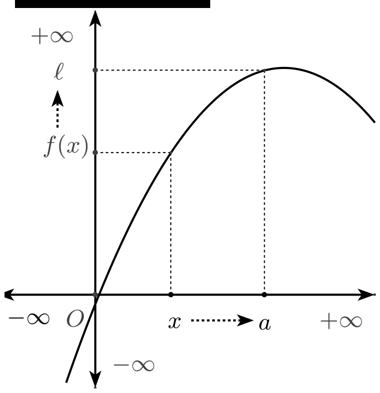
Chapitre 2 : Limites de fonctions et de suites -13-09-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

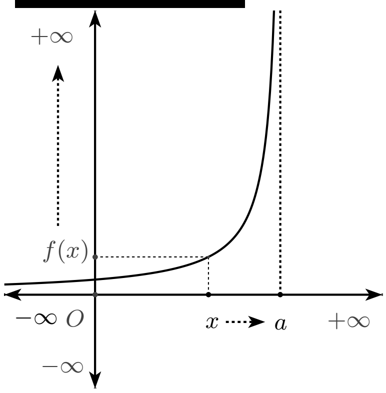
1. Notion de limite : les différentes situations.

Dans ces illustrations, a et ℓ désignent des réels fixés.

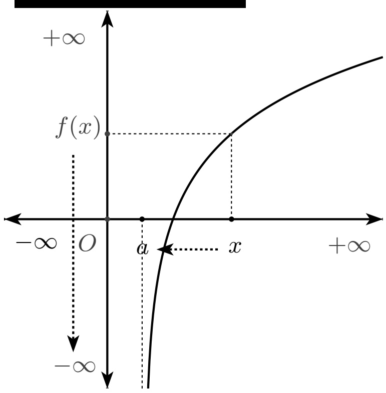
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



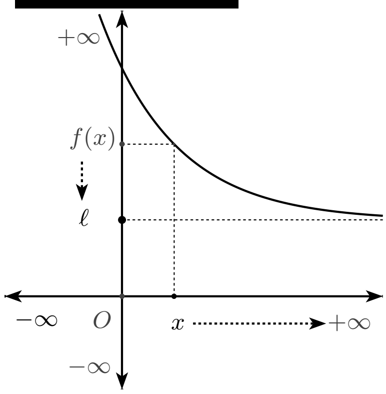
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



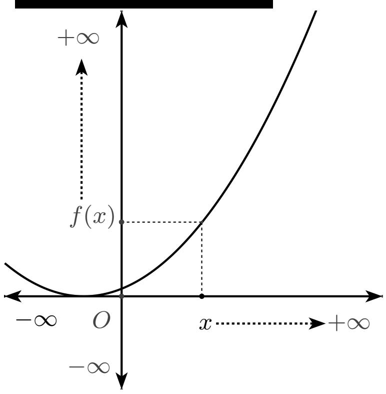
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



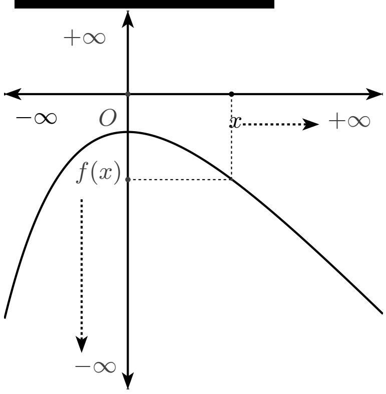
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



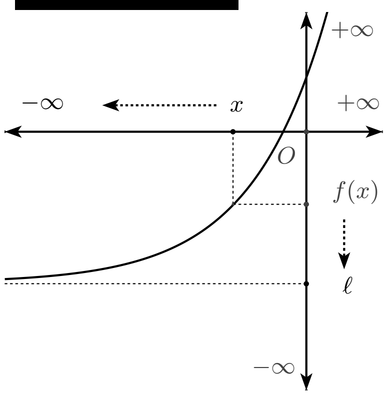
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



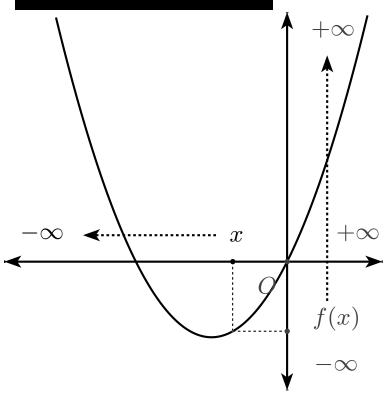
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



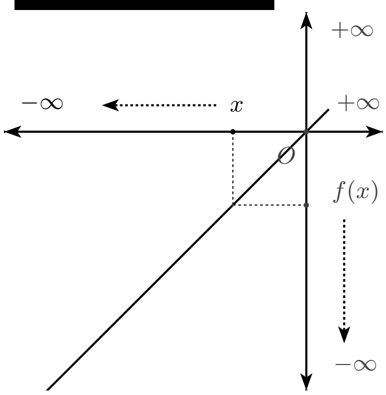
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



La notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ se lit : la *limite* de $f(x)$ lorsque x tend vers a est ℓ. Les symboles ℓ et a peuvent être des nombres réels ou *moins l'infini* $(-\infty)$ ou *plus l'infini* $(+\infty)$.

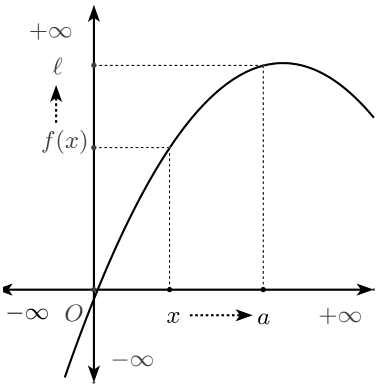
2. Limite lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$

Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez proche du réel a. Précisement

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff$
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Ou : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \mid\ x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.



Exemple. Prouver à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to a} x = a$: ...
....
....
....

Remarque. La fonction f est *continue* sur $\mathcal{D}$ si pour tout $a \in \mathcal{D}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
On verra que toutes les fonctions usuelles sont continues. Pour de telles fonction le calcul d'une limite en un point de l'ensemble de définition est un calcul d'image.
Application : $\lim\limits_{x\to\pi} x\cos(x) =$

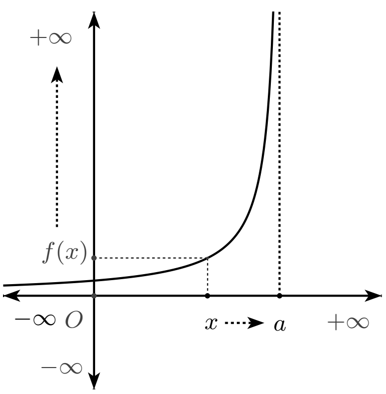
Cas où la limite est $+\infty$ ou $-\infty$

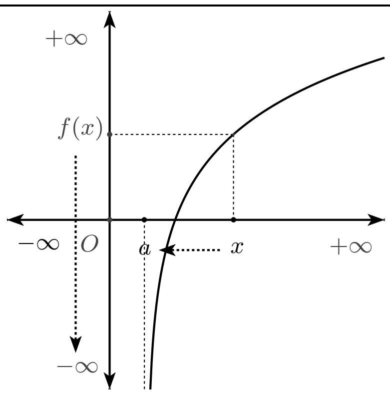
On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche du réel a. Précisément :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff$
pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

Ou : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists \delta > 0\ \mid\ x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(x) \in]A, +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff$
pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]-\infty, -A[$.





Interprétation géométrique. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = a$ comme *asymptote verticale.*

Exemple. Prouver à l'aide des définitions que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
Interpréter......................
....
....

Limites à droite et à gauche

Les limites à droite $\lim\limits_{x\to a^+} = \lim\limits_{x\to a, x>a}$ sont définies en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a, a+\delta[$.
Les limites à gauche $\lim\limits_{x\to a^-} = \lim\limits_{x\to a, x<a}$ sont définies en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a-\delta, a[$.
L'interprétation en terme d'asymptote est identique.

3. Limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

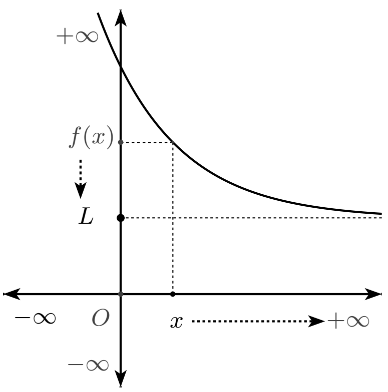
Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

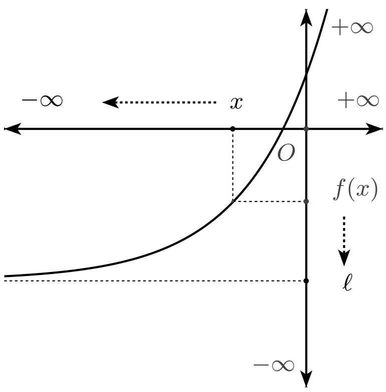
On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez grand. Précisement

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

<u>Ou</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ \mid\ x \in]B, +\infty[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Remarque. On définit de même $\lim\limits_{x \to -\infty}$ en remplaçant $]B, +\infty[$ par $]-\infty, -B[$.





Interprétation géométrique. Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

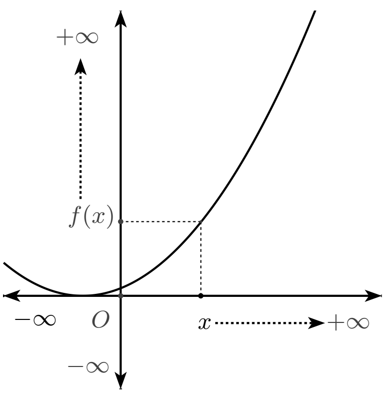
On définit de façon analogue l'asymptote horizontale en $-\infty$.

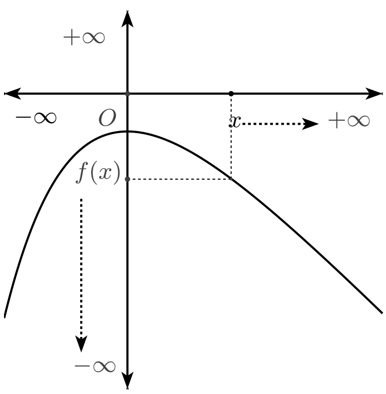
Cas d'une limite infinie

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand. Précisement

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$
pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

<u>Ou</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ \mid\ x \in]B, +\infty[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.



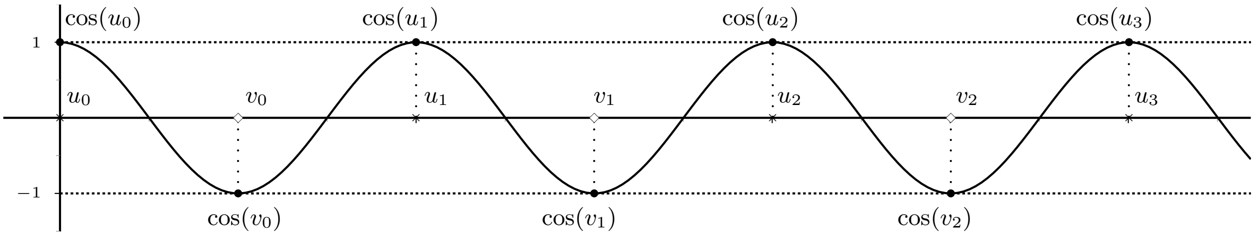


Exemple. Prouver à l'aide des définitions que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exemple. Définir avec précision : (on se réfère à la première page pour les illustrations)
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Longleftrightarrow$ . . . .
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$ . . . .
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow$ . . . .

4. Absence de limite

Pour prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers a lorsque n tend vers $+\infty$ mais telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$. (contraposée du thm sur les limites des fonctions composées du 6.)



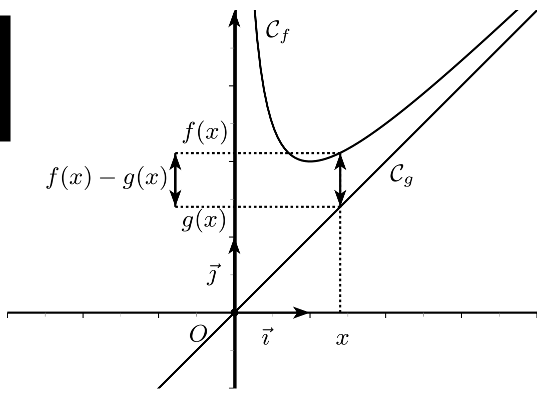
Exemple. $\cos(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. En effet : soient (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \pi + 2\pi n$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2\pi n) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\pi + 2\pi n)$.

5. Courbe asymptote

Différence de deux courbes

Soient f et g définies sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Pour tout $x \in I$, le nombre $f(x) - g(x)$ représente, au signe près, l'écart entre le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.



Méthode. Ainsi, pour rechercher les points d'intersection de deux courbes, on résout l'équation $f(x) - g(x) = 0$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points appartenant aux deux courbes. On détermine leurs ordonnées en utilisant indifféremment $y = f(x)$ ou $y = g(x)$.

Méthode. De même, pour déterminer la position relative de deux courbes, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction des valeurs de x, et on l'interprère ainsi :
- sur les intervalles où $f(x) - g(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.
- sur les intervalles où $f(x) - g(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Asymptote oblique

On dit que la courbe représentative d'une fonction f admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$ si l'écart entre la courbe et la droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Exemple. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3x^2+2x+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$: ....
....
....

On définit de même l'asymptote oblique en $-\infty$, et la notion de courbe asymptote :

Exemple. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$. Montrer que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$: ....

6. Opérations sur les limites

Les résultats qui suivent sont valables pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Somme de limites

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	⚠ ? ⚠

Produit de limites

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	⚠ ? ⚠

Quotient de limites

$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ $(0,\ v(x)>0)$	0^- $(0,\ v(x)<0)$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{v(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Remarque. Lorsque la forme indeterminée, $\left(\infty-\infty; \infty\times 0; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}\right)$ il faut changer l'écriture de la suite pour lever l'indetermination.

Remarque. Pour traiter les limites de quotients $\frac{u}{v}$ on remarque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$.

⚠ dans le cas de $\frac{1}{v(x)}$, si la limite de $v(x)$ est nulle, il faut étudier le signe de $v(x)$ pour conclure.

⚠ On n'écrit jamais de calcul faisant intervenir $+\infty$, $-\infty$, 0^+, 0^-,...

Exemple. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$

• La limite $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x}$ dépend du signe de $2-x$ car $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$.

Or

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2-x$	$+$ 0 $-$

donc si $x<2$, on a $2-x>0$, d'où $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$.

Remarque. La dernière colonne du tableau des produits est une forme indeterminée :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0\end{array}\right\} \text{ mais } \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 7$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0\end{array}\right\} \text{ mais } \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0\end{array}\right\} \text{ mais } \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0$$

Limite de fonctions composées

Soient $a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} v(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = \ell$.

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

7. Traiter les formes indéterminées

⚠ avant d'utiliser l'une des techniques suivantes, s'assurer d'avoir **simplifié** l'expression.

Exemple. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Formes indéterminées avec des polynômes

D'une manière générale, factoriser dans l'expression, ou au numérateur et au dénominateur, le terme qui semble devoir dominer :

Exemple. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6 - x^4 + x^3 + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 10\sqrt{x} - x + 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème. La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

Preuve. Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :
$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = ... = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
donc la limite du facteur entre paranthèses est 1.
Par produit on a bien : $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$. □

Exemple. $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-x}{2x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ par théorème.

Exemple. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+x+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

⚠ Le théorème du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.

⚠ L'utilisation du théorème pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :
1. Application du théorème 2. Simplification 3. Conclusion.

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et changement de variable

Pour les limites en $a \in \mathbb{R}$ (ou a^+, a^-) qui présentent une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, il peut être opportun de faire un changement de variable en posant $x = a + h$.

Exemple. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+x-2}{1-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Forme indéterminée et radicaux : quantité conjuguée

Pour les limites faisant intervenir des radicaux, on peut essayer de multiplier au numérateur et au dénominateur par *la quantité conjugée* avec comme idée d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

Exemple. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8. Théorèmes d'encadrement

Théorème de majoration et de minoration

[ROC] Soient u et f deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.
⋆ si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
⋆ si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Preuve. On prouve le premier point (la démo du second est analogue, laissée en exercice).
Par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe $B > a$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $u(x) \in [A, +\infty[$.
Or pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geqslant u(x)$ donc en particulier, pour tout $x > B$, on a l'inégalité $f(x) \geqslant u(x) \geqslant A$, donc $f(x) \geqslant A$. On a prouvé :
Pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $f(x) \in [A, +\infty[$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\square$.

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\cos(x) - 2) =$ . . . .

Théorème « des gendarmes »

[ROC] Soient u, v, et f trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque. il existe des théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$, vers a, a^+ ou a^-.

⚠ Les inégalités strictes ne passent pas aux limites. Contre exemple : . . . .
. . . .

Exemple. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$ . . . .
. . . .
. . . .

Preuve. Démonstration du théorème des gendarmes :

9. Limites de suites

Si la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

⚠ La réciproque est fausse ! (u_n) peut admettre une limite alors que f n'en admet pas.