Chapitre 12 : Compléments de probabilités -09-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Dénombrement

Permutations

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on note $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ (« factorielle n ») le produit des n premiers entiers naturels non nuls. On pose $0! = 1$.
Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

élément 1	élément 2	...	élément n-1	élément n
n choix	n-1 choix	...	2 choix	1 choix

: $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$ choix.

Exemple. Dénombrer et lister les anagrammes de BAC. ....
....
....
....

Arrangements

Pour $n \geqslant p$ deux entiers naturels, on note $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ (« arrangements de p éléments parmi n).
Le nombre de possibilités de choisir *successivement* p éléments dans un ensemble de n éléments est A_n^p. A_n^p est le nombre de p-listes (listes ordonnées de p éléments) d'un ensemble à n éléments.

élément 1	élément 2	...	élément p
n choix	n-1 choix	...	n-p+1 choix

: $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = A_p^n$ choix.

Exemple. Une loterie nationale consiste à tirer successivement et sans remise six numéros parmi $\{1, 2, \ldots, 49\}$. Quelle est la probabilité d'avoir choisi les six bon numéros dans l'ordre ?
....
....
....

Combinaisons

Pour $n \geqslant p$ deux entiers naturels, on note $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (« combinaisons de p éléments parmi n »)
Il y $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ possibilités de choisir *simultanément* p éléments dans un ensemble de n éléments.
$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble de n éléments.

Il y a $p!$ façons d'ordonner les éléments d'une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments, donc : $A_n^p = p! C_n^p$ d'où le résultat.

Exemple. En base 2, combien existe-t-il d'entiers $0 \leqslant n \leqslant 1000000000$ qui s'écrivent avec exactement quatre « 1 » ? ....
$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} =$ .... Prouver : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$ ....

2. Propriétés des combinaisions

Triangle de Pascal

Soient deux entiers naturels $p < n$. Alors : $\begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix}$.

Preuve. $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p+1 \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}+\dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \dfrac{n!\times(p+1)}{(p+1)!(n-p)!}+\dfrac{n!\times(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \dfrac{n!\times(p+1+n-p)}{(p+1)!(n+1-1-p)!} = \dfrac{n!\times(n+1)}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$. ☐

Exemple. Coefficients binomiaux pour $0 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$:

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	**2**	**1**				
3	1	3	**3**	1			
4							
5							
6							

Formule du binôme de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on a : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} a^p b^{n-p}$.

Preuve. Lorsqu'on développe le produit de n facteurs $(a+b)^n$, le coefficient de $a^p b^{n-p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments (les facteurs a) parmi un ensemble à n éléments (les facteurs $(a+b)^n$). ☐

Exemple. Développer : $(1+x)^4 =$ ....

Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} =$ ....

Combien un ensemble à n éléments a-t-il de parties ? ....

Loi binomiale

On répète n fois de facon *indépendante* une expérience aléatoire *identique* qui suit une loi de Bernouilli (deux issues S et $\bar{S}$ de probabilités respectives k et $1-k$.
Alors la variable aléatoire X égale au nombre de succès S suit une loi binomiale de paramètres k et n ($\mathcal{B}(k,n)$) : $P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$. On a alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}ar(X) = np(1-p)$.

Preuve. Les expériences étant identiques et indépendantes, la probabilité d'obtenir k succès et $n-k$ échecs dans un ordre fixé est $p^k(1-p)^{n-k}$. Il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisir k « S »sur une liste de n éléments, d'où le résultat. ☐

Exemple. On lance 10 pièces équilibrées. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 faces et 4 piles ?

3. Loi continues : exemple de la loi uniforme

Une variable aléatoire X qui prend des valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ (au lieu d'un nombre fini de valeurs, ou de valeurs entières seulement par exemple) est dite *continue*. On va s'intéresser au calcul de $P(a \leqslant X \leqslant b)$: probabilité que la variable alétoire apppartienne à un intervalle $[a;b]$.

Notion de densité

On dit qu'une fonction f continue, positive et définie sur un intervalle I est une densité si $\displaystyle\int_I f(x)dx = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit la loi de probabilité de densité f sur I si pour tous $a < b$ de I, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exemple. Montrer que la fonction f définie sur l'intervalle $[1;e^2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ est une densité. Calculer la probabilité qu'une variable aléatoire X suivant la loi de densité f vérifie $e \leqslant X \leqslant e^2$.

....

....

....

....

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ si elle est de densité $\dfrac{1}{\beta-\alpha}$ sur cet intervalle. Ainsi,

$$\text{si } \alpha \leqslant a \leqslant b \leqslant \beta,\ P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{b-a}{\beta-\alpha} = \frac{\text{longueur de } [a;b]}{\text{longueur de } [\alpha;\beta]}$$

Preuve. $\dfrac{1}{\beta-\alpha}$ est une densité de l'intervalle $[\alpha;\beta]$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{\beta-\alpha}dx = \left[\frac{1}{\beta-\alpha}x\right]_\alpha^\beta = 1$.

Ainsi, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\beta-\alpha}dx = \left[\frac{1}{\beta-\alpha}x\right]_a^b = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$ □

Exemple. Une variable aléatoire suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.
Quelle est la probabilité que $X = 0.75$? que $X \geqslant 0.75$? que $X > 0.75$?

....

....

....

....

Loi exponentielle

Soit $a > 0$, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ae^{-ax}$ est une densité sur $]0;+\infty[$. On dit que c'est la densité d'une loi exponentielle.

Preuve. $\displaystyle\int_0^t ae^{-ax}dx = [-e^{-ax}]_0^t = 1 - e^{-at}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1 - e^{-at} = 1$. □