Chapitre 10 : Géométrie dans l'espace -20-03-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

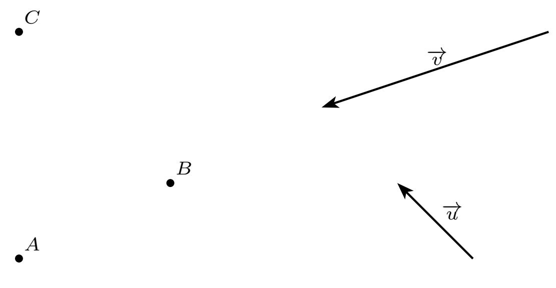
1. Bases de la géométrie spatiale

Approche vectorielle de la géométrie

On admet qu'il existe un ensemble $\overrightarrow{E}$ des vecteurs à trois dimensions,
- ⋆ muni d'une addition commutative, associative, d'élément neutre $\overrightarrow{0}$ (le vecteur nul), et pour laquelle chaque vecteur possède un opposé ($-\overrightarrow{u}$, le vecteur de sens contraire)
- ⋆ muni d'une multiplication scalaire telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{E}$, $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$, $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$, $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ et $1\vec{u} = \vec{u}$.
- ⋆ contenant au moins un vecteur non nul. (première dimension)
- ⋆ contenant au moins un vecteur non proportionnel au précédent. (deuxième dimension)
- ⋆ contenant au moins un vecteur non combinaison des deux précédents (dimension 3)
- ⋆ tel que tout vecteur est combinaison des trois précédents (pas plus de trois dimensions)

L'*espace* $\mathcal{E}$ est un ensemble de points sur lequel les vecteurs de $\overrightarrow{E}$ agissent par translation :
⋆ étant donnés deux points A, B de $\mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que B soit l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$. On note $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et on dit que la flèche droite allant de A vers B est <u>un</u> *représentant* du vecteur $\vec{u}$.
⋆ L'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtient par deux translations successives de vecteur $\vec{u}$ puis $\vec{v}$.
⋆ La translation de vecteur nul préserve chacun des points de l'espace.

Exemple. Représenter l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$, l'image de B par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, un représentant de $-\vec{u}$ et un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$.



Relation de Chasles Pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Preuve. Par définition, C est à la fois l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et par celle de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Par unicité, on obtient le résultat. □

Exemple. Placer G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

• $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que : $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} = \vec{0}$. ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ proportionnels).
• $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w} = \vec{0}$. (l'un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres).

2. Barycentres

Réduction. Soient n points $A_1,\dots,A_n$ et n réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tels que $\alpha_1+\dots+\alpha_n\neq 0$.
Il existe un unique point G tel que pour tout point M on ait :

$$\alpha_1\,\overrightarrow{MA_1}+\dots+\alpha_n\,\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\dots+\alpha_n)\,\overrightarrow{MG}$$

G est le *barycentre* du système de points pondérés $\{(\alpha_1,A_1),...,(\alpha_n,A_n)\}$.
Lorsque $\alpha_1=\dots=\alpha_n$, G est l'*isobarycentre* de $\{A_1,...,A_n\}$.
On parle de *milieu* lorsque $n=2$ et de *centre de gravité* lorsque $n=3$.

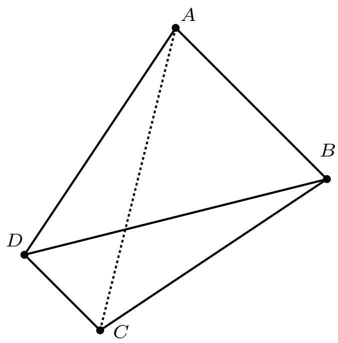
Preuve. Soit G l'image de A_1 par la translation de vecteur $\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\,\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\frac{\alpha_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\,\overrightarrow{A_1A_n}$.
On a donc : $(\alpha_1+\dots\alpha_n)\,\overrightarrow{A_1G}=\alpha_2\,\overrightarrow{A_1A_2}+\dots\alpha_n\,\overrightarrow{A_1A_n}$.
Ainsi, pour tout point M de l'espace,

$$\begin{aligned}\alpha_1\,\overrightarrow{MA_1}+\dots+\alpha_n\,\overrightarrow{MA_n} &= \alpha_1\,(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A_1})+\dots+\alpha_n\,(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A_n})\\ &= (\alpha_1+\dots+\alpha_n)\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\,\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\alpha_n\,\overrightarrow{A_1A_n}\\ &= (\alpha_1+\dots+\alpha_n)\,(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1G})=(\alpha_1+\dots+\alpha_n)\,\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

Cela prouve l'existence de G. Supposont que G' ait la même propriété,
d'une part : $\alpha_1\,\overrightarrow{GA_1}+\dots+\alpha_n\,\overrightarrow{GA_n}=(\alpha_1+\dots+\alpha_n)\,\overrightarrow{GG}=\vec{0}$.
d'autre part : $\alpha_1\,\overrightarrow{GA_1}+\dots+\alpha_n\,\overrightarrow{GA_n}=(\alpha_1+\dots+\alpha_n)\,\overrightarrow{GG'}$
d'où $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$: $G=G'$, on en déduit l'unicité. □

Remarque. cas particuliers de la propriété de réduction :
- si $M=G$: $\vec{0}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{GA_1}+\dots+\alpha_n\cdot\overrightarrow{GA_n}$
- si $M=A_1$: $(\alpha_1+\dots\alpha_n)\cdot\overrightarrow{A_1G}=\alpha_2\cdot\overrightarrow{A_1A_2}+\dots\alpha_n\cdot\overrightarrow{A_1A_n}$

ce qui permet de construire G.



Exemple. Construire l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$.

. . . .

On en déduit les deux propriétés suivantes (en simplifiant par k pour l'homogénéité et en appliquant deux fois la définition du barycentre pour l'associativité) :

Homogénéité. G est alors le barycentre de $\{(k\alpha_1,A_1),\dots,(k\alpha_n,A_n)\}$ où $k\in\mathbb{R}^*$.
Associativité. Si $s=\alpha_1+\dots\alpha_p\neq 0$ et H est le barycentre partiel de $\{(\alpha_1,A_1),\dots,(\alpha_p,A_p)\}$ alors G est le barycentre de $\{(H,s),(A_{p+1},\alpha_{p+1}),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$

Exemple. Prouver que l'isobarycentre du tétraèdre est situé au quart du segment joingant un sommet au centre de gravité de la face opposée.

Exemple. Prouver que les médianes du tétraèdre (segments joignant les milieux des côtés opposés) se coupent en leurs milieu, et que le point de concours est l'isobarycentre du tétraèdre.

3. Droites

Définition

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
- L'ensemble des barycentres de A et B affectés de poids positifs est le *segment* $[AB]$.
- L'ensemble des barycentres de A et B affectés de poids quelconques est la *droite* (AB).
- Des points appartenants à une même droite sont dits *alignés*.
- Deux droites sont *sécantes* si et seulement si elles ont un seul point commun.
- $\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur directeur* de la droite $\overrightarrow{AB}$. On dit que (AB) est une *direction* de $\overrightarrow{AB}$.
- Deux droites sont *parallèles* lorsque elles ont deux vecteurs directeurs colinéaires.

Caractérisation des droites et de l'alignement

Propriété. L'ensemble des vecteurs directeurs d'une droite est l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur directeur de cette droite.

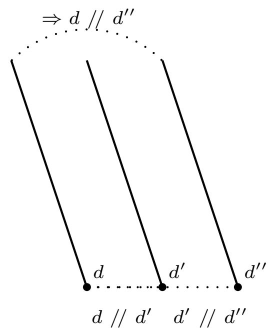
Preuve. Si C, D sont deux points distincts de (AB), il existe a, b réels tels que C soit le barycentre de $\{(a, A); (b, B)\}$. On peut, par homogénéité, supposer $a + b = 1$. D'après la propriété de réduction pour $M = A$, $b\overrightarrow{AB} = (a + b)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$. De même, il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ avec $a' + b' = 1$ tels que $b'\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. En soustrayant les égalités, il vient : $(b - b')\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.
Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, soit C l'image de A par la translation de vecteur $\lambda\,\overrightarrow{AB}$.
On a : $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ donc C est le barycentre de $\{(1 - \lambda, A), (\lambda, B)\}$: $C \in (AB)$,
d'où $\lambda\,\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB). □

- Il existe une unique droite passant par deux points donnés.
- Il existe une unique droite passant par un point donné, de vecteur directeur donné.
- Il existe une unique droite passant par un point donné, parallèle à une droite donnée.
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve. • Si $C, D \in (AB)$ sont distincts, les barycentres de C et D sont les mêmes que ceux de A et B par associativité. Donc $(AB) = (CD)$.
• Soient $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \neq 0$. Soit B l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$: (AB) passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Une autre droite avec les mêmes propriétés contiendrait B, donc serait égale à (AB).
• Le dernier point se déduit du précédent et de la définition du parallélisme. □

Transitivité du parallélisme

Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.



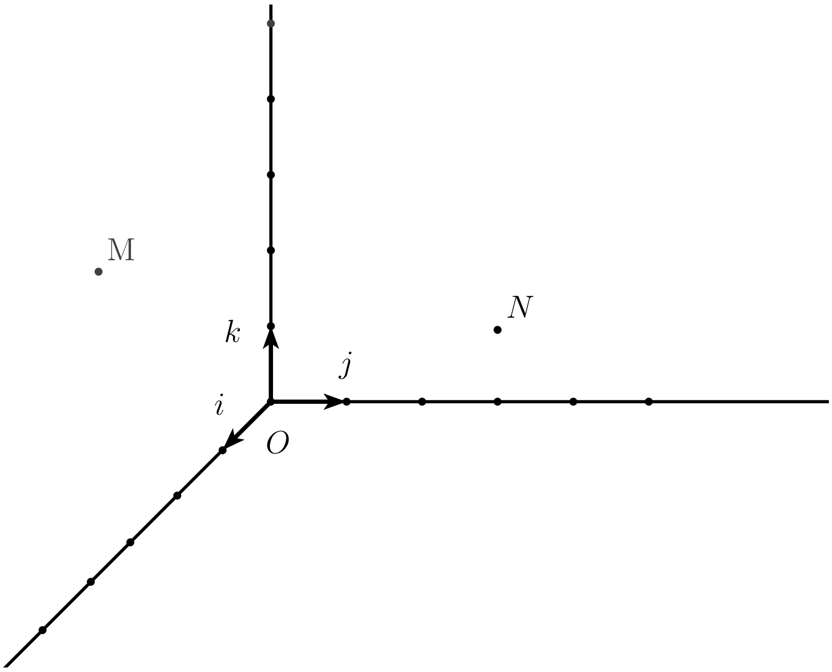
Preuve. Deux droites parallèles à une même droite ont des vecteurs directeurs colinéaires à ceux de cette droite, donc colinéaires entre eux. □

Exemple. Dans un téraèdre $ABCD$, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Déterminer la position relative de (IJ) et (AB), (IJ) et (BC), (IJ) et (AD).

4. Repérage dans l'espace

Un *repère* de l'espace est la donnée d'un point de trois vecteurs non coplanaires $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Pour tout point M, $\overrightarrow{OM}$ est la combinaison des vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$: il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$. Les nombres $(x; y; z)$ définissent les *coordonnées* du point M ; x est l'*abscisse*, y l'*ordonnée* et z la *cote*.

Exemple. Placer $P(1; 2; 3)$. Déterminre les coordonnées de M sachant que $z_M = 3$ et celles de N sachant que $x_N = 0$. Déterminer les coordonnées de Q tel que $PQNM$ soit un parallélogramme.



- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x', y + y', z + z')$.
- Le barycentre G de $\{(\alpha_1, A_1), \ldots, (\alpha_n, A_n)\}$ a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \ldots + \alpha_n x_{A_n}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}; \quad y_G = \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \ldots + \alpha_n y_{A_n}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}; \quad z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \ldots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$$

- Dans un repère orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- **Système d'équations paramétrées d'une droite**. La droite (AB) est l'ensemble des $M(x; y; z)$ tels qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}$$

Exemple. Déterminer un système d'équations de (MN).

5. Plans

Définition

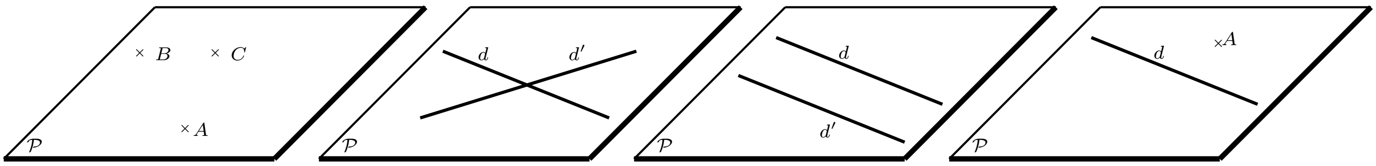
• L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le *plan* (ABC).
• Des ensembles de points contenus dans un même plan sont dits *coplanaires*.
• Une droite (AB) est *parallèle* à un plan (DEF) si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.
• Deux plans sont parallèles si et seulement si toutes les droites de l'un sont parallèles à l'autre.

Propriétés.
• $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont coplanaires si et seulement si $M \in (ABC)$.
• un plan contenant deux points distincts d'une droite contient cette droite.
• une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est contenue dans le plan ou d'intersection vide avec le plan.
• deux plans sont parallèles si et seulement s'ils sont égaux ou d'intersection vide.

Preuve. • $M \in (ABC) \iff \alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls.
• Les barycentres de trois points contiennent les barycentres de deux de ces points.
• Si $(AB) \mathbin{/\!/} (DEF)$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{DE} + \beta \cdot \overrightarrow{DF}$. Soit (AB) et (DEF) n'ont pas de point commun, soit (AB) et (DEF) ont un point C en commun, et l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dans (DEF) (associativité des barycentres).
Réciproquement, si (AB) a un point C commun à (DEF) et un point G en dehors, $\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas coplanaires.
• Si deux plans parallèles ont un point commun, toutes les droites contenues dans un plan passant par ce point sont contenues dans l'autre plan : les deux plans sont identiques. □

Caractérisation des plans

Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant :



(a) trois points non alignés **(b)** deux droites sécantes **(c)** deux parallèles strictes **(d)** une droite et un point extérieur

Preuve. Comme pour les droites, l'unicité dans (a) vient de l'associativité du barycentre. L'existence et l'unicité de (b), (c) et (d) se déduisent du point 2 de la propriété et de (a). □

Exemples d'équations de plan

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $z = 0$ est un plan. (il en est de même pour $x = 0$ ou $y = 0$).

Preuve. Soient $A(1; 0; 0)$ et $B(0; 1; 0)$. On a :
$z = 0 \iff \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \iff \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} = \vec{0}$ ce qui équivaut à : M est un barycentre de O, A et B. (réduction appliquée à O). □

Exemple. À quelle condition une droite de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est-elle parallèle au plan d'équation $y = 0$?

6. Produit scalaire

Définitions

On suppose l'espace $\mathcal{E}$ muni d'une distance. On note $||\overrightarrow{AB}|| = AB$ la *norme* d'un vecteur.

⋆ Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

⋆ Deux droites sécantes sont *perpendiculaires* si elles forment un angle droit.
⋆ Deux droites sont *orthogonales* si l'une admet une parallèle perpendicuaire à l'autre.
⋆ Deux vecteurs sont dits orthogonaux si et seulement si leurs directions sont orthogonales.
⋆ Un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$est un repère dont les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Propriétés

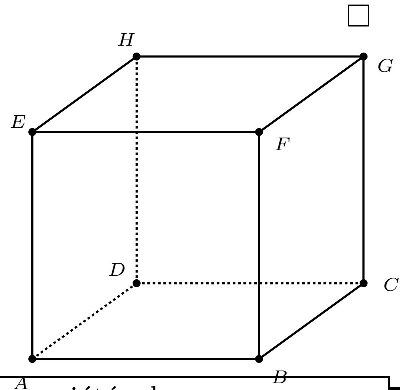
Propriété. $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de Pythagore. □

Autres écritures du produit scalaire. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$,
• si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.
• Si $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos((\vec{u};\vec{v}))$.

Preuve. Première formule : exprimer $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$, $||\vec{u}+\vec{v}||$ en fonction de x, y....
Seconde formule : choisir un repère orthonormé tel que $\vec{\imath}$ soit de même sens que $\vec{u}$ et $\vec{\jmath}$ soit coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Passer en coordonnées polaires. □

Exemple. Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les droites (EC) et (BG) sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?



Théorème. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel λ, on a les propriétés de
⋆ Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
⋆ Homogénéité : $\vec{u},\vec{v}$, $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$
⋆ Bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{w})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
⋆ Positivité : $||u||^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} \geqslant 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \overrightarrow{0}$.

Preuve. La symétrie est évidente, l'homogénéité, la bilinéarité et la positivité se prouvent en écrivant chaque membre en coordonnées cartésiennes. □

Exemple. Théorème de la médiane : dans un triangle ABM, si I est le milieu de $[AB]$ alors $MA^2+MB^2 = MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

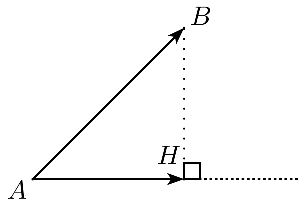
7. Projections orthogonales

Projetction orthogonale d'un point sur une droite

Soient A et C deux points distincts de l'espace et H est le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire (de norme 1) de (AC), $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \pm AH$ (le signe permet de placer H par rapport à A sur (AC)).



Preuve. utiliser la relation de Chasles pour introduire H dans le premier membre. $\square$

Exemple. Soit $M(1;2;3)$ et $N(-1;0;2)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de O sur (MN). (utiliser une équation paramétrique de (MN) et la propriété ci-dessus).

....

....

....

....

....

Équations cartésiennes de plan

• Soit $\vec{n} \neq 0$ et $A \in \mathcal{E}$. L'ensemble des points $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \vec{0}$ est le plan orthogonal à $\vec{n}$ passant par A. Le vecteur $\vec{n}$ est un *vecteur normal* au plan $\mathcal{P}$.
• Si a, b, c sont trois réels non tous nuls, dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'ensemble des $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$. Cette équation est une équation du plan $\mathcal{P}$.
• Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, une équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ est $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.

Preuve. • Dans un repère orthonormé $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{n})$, $\overrightarrow{AM}(x;y;z)$ et $\vec{n}(0;0;1)$ donc :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff z = 0$ qui est l'équation d'un plan.
• Supposons $a \neq 0$. Soit $A(-d/a;0;0)$, $M(x;y;z)$ appartient au plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ passant par A si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x+d/a)+by+c=0 \iff ax+by+cz+d=0$.
• Il suffit d'écrire en coordonnées : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. $\square$

Applications.
• Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux colinéaires.
• Deux plans sont perpendiculaires si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux orthogonaux.
• Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.
• Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan.

Exemple. Déterminer une équation du *plan médiateur* de $[OA]$ (plan passant par le milieu de $[OA]$ et orthogonal à $[OA]$) où $A(1;2;3)$.

8. Distance d'un point à un plan

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Alors la distance de A à $\mathcal{P}$ est la distance de A à son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$ et vaut :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve. Soit $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
Les vecteur $\vec{n}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont colinéaires donc : $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}| = ||\vec{n}|| \times AH = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times HA$.
Par ailleurs, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = a(x_A - x_H) + b(y_A - y_H) + c(z_A - z_H) = ax_A + by_A + cz_A - (ax_H + by_H + cz_H)$.
Mais $H \in \mathcal{P}$ donc $ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \iff d = -((x_H + by_H + cz_H)$.
Ainsi, $AH \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |ax_A + by_A + cz_A + d$ d'où $AH = d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. $\square$

9. Bilan des méthodes

Droites

• Un vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ d'une droite $\mathcal{D}$ est formé par deux points distincts $A, B \in \mathcal{D}$.
• Un système d'équations paramétriques d'une droite est de la forme $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{cases}$
où $A(x_A; y_A; z_A)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur directeur de D.
• À partir de l'équation paramètrique, on trouve les coordonnées d'un point de la droite on choisissant un paramètre t, un vecteur directeur a pour coordonnées les coefficients $(a; b; c)$ du paramètre t dans les différentes équations.
• Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
• Deux droites sont sécantes en $M(x; y; z)$ si et seulement si x, y, z sont solutions du système formé par les 6 équations paramètriques des deux droites. ⚠ : les paramètres t et t' sont a priori différents !
• Deux droites ne sont pas coplanaires si elles sont ni sécantes ni parallèles.
• Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles sont dites perpendiculaires si elles ont en plus un point commun.

Plans

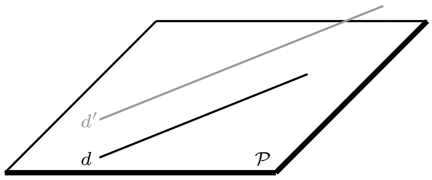
• Un vecteur normal $\vec{n}$ d'un plan est un vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs formés par deux points du plans. Il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires formés de points du plan.
• Une équation d'un plan $\mathcal{P}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Pour déterminer d, on remplace x, y, z par les coordonnées d'un point du plan.
• Deux plans sont parallèle si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
• Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Plans et droites

• $M(x, y, z)$ est l'intersection d'un plan et d'une droite si et seulement si x, y, z sont solutions du système formé par les 3 équations paramètriques de la droite et par une équation du plan.
• Une droite et un plan sont parallèles si et seulement si le vecteur directeur de la droite est orthogonal au vecteur normal du plan.
• Une droite et un plan sont perpendiculaires si et seulement si le vecteur directeur de la droite est colinéaire au vecteur normal du plan.

10. Positions relatives

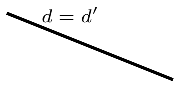
- Une droite parallèle à une autre droite contenue dans un plan est parallèle au plan.
- Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à la droite passant par un point du plan est contenue dans le plan.



Preuve. Soient $d \mathbin{//} d'$ deux droites, avec $d \subset \mathcal{P}$. Si d' et strictement parallèle à $\mathcal{P}$, le théorème est vrai, sinon il existe $A \in \mathcal{P} \cap d'$. Les droites d et d' définissent un unique plan, de même que $A \subset d'$ et d donc ce plan est $\mathcal{P}$: $d' \subset \mathcal{P}$ donc $d' \mathbin{//} \mathcal{P}$.
Si $d \mathbin{//} (ABC)$ et $d' \mathbin{//} d$ avec $A \in d'$. Alors un vecteur directeur de d (donc de d') est coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, d'où d' est contenue dans (ABC). ☐

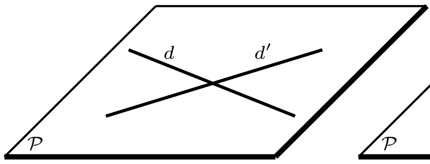
Position relative de deux droites

Deux droites d et d' sont dans une et une seule des quatre situations suivantes :



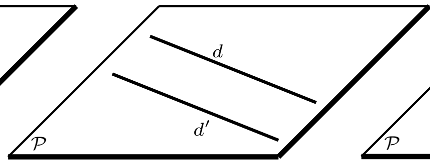
(a) : $d = d'$

parallèles, coplanaires.



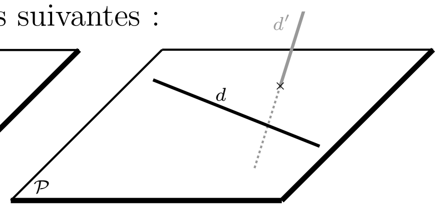
(b) : d et d' *sécantes*

d, d' contenues dans un unique plan.



(c) : d et d' *parallèles strictes*

d, d' contenues dans un unique plan.

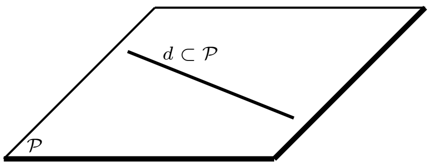


(d) : d et d' non coplanaires

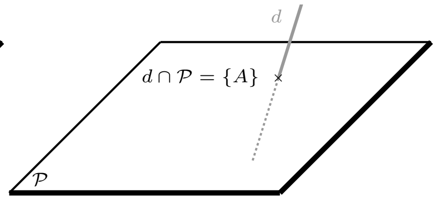
⚠ d et d' ni sécantes, ni parallèles

Position relative d'une droite et d'un plan

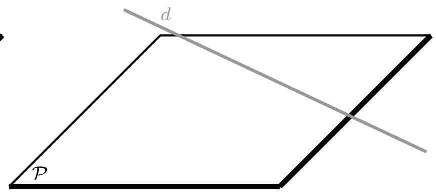
Une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont dans une et une seule des situations suivantes :



(a) : d contenue dans $\mathcal{P}$



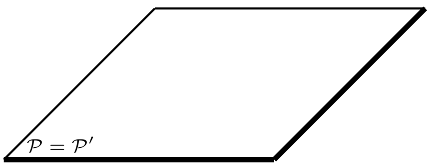
(b) : d coupe $\mathcal{P}$ en un point



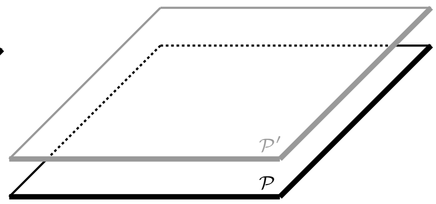
(c) : d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$

Position relative de deux plans

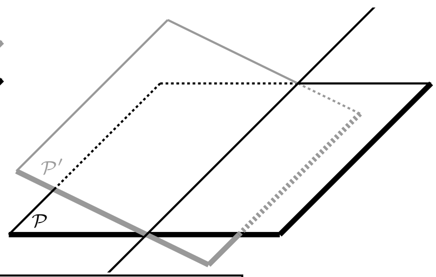
Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dans une et une seule des situations suivantes :



(a) :$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus



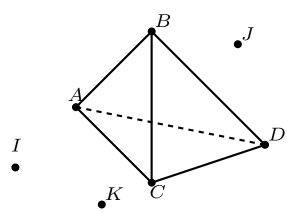
(b) : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles



(c) : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' =$ une droite

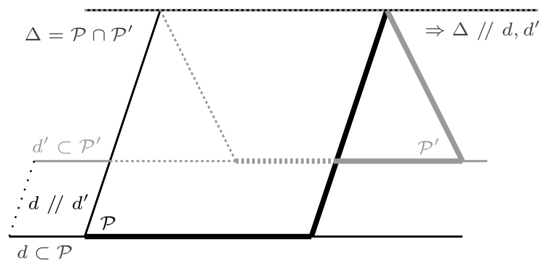
Preuve. Pour la dernière situation : si l'intersection de deux plans distincts contient un point, elle contient la parallèle à une droite contenue dans l'un et pas dans l'autre. ☐

Exemple. Sachant que $I \in (AB)$, $J \in (ABD)$ et $K \in (ACD)$, représenter la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJK). (chercher pour chaque face deux points appartenant au plan de la face et à (IJK)).



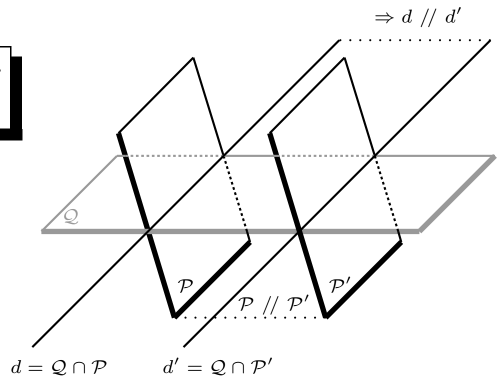
11. Autres théorèmes de parallélisme

> « théorème du toit ». Soient deux droites parallèles chacune contenue dans un plan. Si les plans sont sécants, la droite d'intersection est parallèle à chacune des droites.



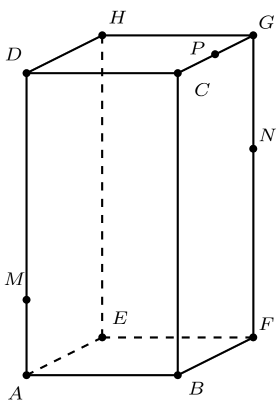
Preuve. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants suivant une droite Δ, et d, d' deux droites telles que $d \subset \mathcal{P}$, $d' \subset \mathcal{P}'$ et $d \mathbin{//} d'$.
$d \subset \mathcal{P}$ et $\Delta \subset \mathcal{P}$ sont coplanaires. Si $d \cap \Delta = \varnothing$, elles sont donc parallèles, sinon d est parallèle à $\mathcal{P}'$ et rencontre $\mathcal{P}'$, donc $d \subset \mathcal{P}'$.
Ainsi, $\Delta = d$ et $d \mathbin{//} \Delta$. (idem pour $d' \mathbin{//} \Delta$). $\square$

> Si un plan coupe deux plans parallèles, les droites d'intersections sont parallèles.

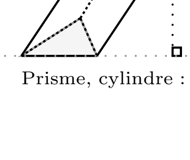


Preuve. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles distincts (si $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, le théorème est évident). Soit $\mathcal{Q}$ un plan coupant $\mathcal{P}$ suivant une droite Δ. Alors $\mathcal{Q}$ coupe $\mathcal{P}'$ suivant une droite Δ'. (sinon $\mathcal{Q} \mathbin{//} \mathcal{P}'$ donc $\mathcal{Q} \mathbin{//} \mathcal{P}$).
Les droites Δ et Δ' sont coplanaires ($\Delta, \Delta' \subset \mathcal{Q}$) donc parallèles puisque contenues dans deux plans distincts. $\square$

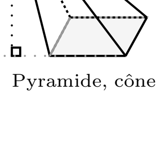
Exemple. Représenter la section du parallélépipède suivant par le plan (MNP), sachant que $M \in [AD]$, $N \in [GF]$ et $P \in [CG]$. (on justifiera chaque étape, on pourra procéder dans cet ordre : $BFGC, ABCD, DCGH, AEHD, EFGH, ABFE$).



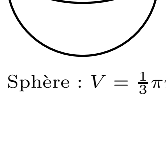
12. Volumes



Prisme, cylindre : $V = B \times h$



Pyramide, cône : $V = \frac{1}{3} B \times h$



Sphère : $V = \frac{1}{3} \pi r^3$