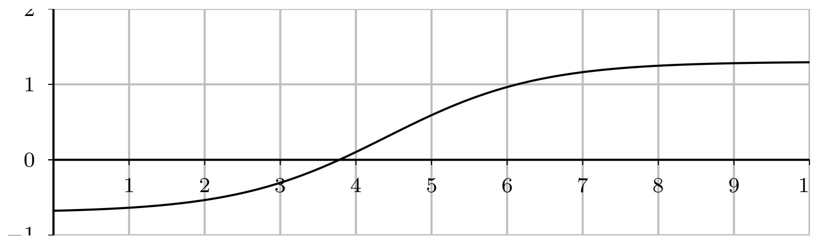
TP 7 : PRINCIPE DE DICHOTOMIE -08-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$), telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.
On va montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution ℓ.

On va pour cela construire une suite d'intervalles imbriqués $[a_n;b_n]$, de longueurs de plus en plus petite :
Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par : $a_0 = a$; $b_0 = b$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n & ; \ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{si } f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & ; \ b_{n+1} = b_n \quad \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE 1. Étude graphique d'un exemple
La courbe est celle d'une fonction f définie sur $[0;10]$. Représenter $a_0, \ldots, a_4$ et $b_0, \ldots, b_4$ sur l'axe des abscisses.



EXERCICE 2. Démonstration du TVI

① Expliquer pourquoi 0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ équivaut à $f(a)f(b) \leqslant 0$.

② Étude de la différence $d_n = b_n - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. (longueur de l'intervalle $[a_n;b_n]$).
  (a) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n (distinguer les cas où $f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0$ et > 0).
  (b) En déduire une expression explicite de d_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, b et a.
  (c) Quel est le signe des termes de la suite (d_n) ? Sa limite ?

③ Convergence des suites (a_n) et (b_n).
  (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n$ en fonction de d_n (on pourra distinguer deux cas). Conclure quant aux variations de (a_n).
  (b) Même question pour la suite (b_n).
  (c) Pourquoi a-t-on $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
  (d) Démontrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes vers une limite commune notée ℓ.

④ Démonstration du théorème.
  (a) Montrer par récurrence que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (b) En déduire $f(\ell)^2 \leqslant 0$ puis la valeur de $f(\ell)$.
  (c) Conclure.

⑤ Remarquer que $f(x) = k \iff f(x) - k = 0$. Conclure qu'on a prouvé le TVI.

EXERCICE 3. Algorithme de dichotomie
Par analogie avec les calculatrices, on note $Y_1 = f$, $A = a$, $B = b$. Écrire un algorithme qui fait saisir les nombres A, B et P (précision) et affiche a_n lorsque $b_n - a_n < P$. Le nombre a_n affiché est alors une valeur approchée à P près de la solution ℓ recherchée. Cet algorthme utilisera les variables A, B, N, P. Programmer l'algorithme à la calculatrice.