

TP 3 : SUITES LOGISTIQUES -28-09-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Vers 1840, le mathématicien belge Verhulst a créé un modèle d'étude des populations.

On suppose que la population étudiée est limitée par une valeur maximale. On définit $u_n \in [0; 1]$ comme le quotient de la population au temps n et de la population maximale possible (si $u_0 = 0,5$, cela signifie que la population de départ est à 50% de la population maximale atteignable).

On admet les deux principes suivants :

- le quotient u_{n+1} au temps $n + 1$ est proportionnel au quotient u_n au temps n . (le renouvellement dépend du nombre d'individus)
- le quotient u_{n+1} au temps $n + 1$ est proportionnel à $1 - u_n$. (le renouvellement dépend de la place qu'il reste)

On considère donc la suite définie par

$$k \in [0; 4], u_0 \in [0; 1] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = k \times u_n \times (1 - u_n)$$

où k est une constante qui dépend de la population étudiée.

PARTIE A. ÉTUDE EMPIRIQUE DU CAS OÙ $k = 1,5$ ET $u_0 = 0,5$

- ① Dans le tableur **OpenOffice**, remplir les cellules $J1$ par « $k =$ », $K1$ par « $1,5$ », $J2$ par « n », $K2$ par « $u(n)$ », $J3$ par « 0 » et $K3$ par « $0,5$ ».
- ② Entrer dans $J4$ la formule¹ « $= J3+1$ ». Entrer dans $K4$ une formule qui permet d'obtenir u_1 en fonction de la valeur des cellules $K3$ et $K\$1$. Par un copier-glisser², remplir de même les cellules $J5$ à $K143$.
- ③ Représenter graphiquement les termes de la suite (n sur l'axe abscisse gradué de 0 à 140, u_n sur l'axe des ordonnées³ gradué de 0 à 1, diagramme de type « XY dispersion »).
- ④ Compléter : *la population se stabilise à % de la population maximale possible.*

PARTIE B : COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE EN FONCTION DES VARIATIONS DE k

- ① Construire une barre de défilement⁴ qui fait varier $A1$ de 0 à 400. Remplacer $K1$ par la formule « $= A1/100$ ». Observer l'évolution du graphique avec k .
- ② Compléter :
 - ★ La population s'éteindra si $k \in \dots\dots\dots$
 - ★ La population se stabilise si $k \in \dots\dots\dots$
 - ★ La population finit par osciller près de deux valeurs si $k \in \dots\dots\dots$
 - ★ La population finit par osciller près de quatre valeurs ou plus si $k \in \dots\dots\dots$
 - ★ La population devient chaotique pour la plupart des $k \in \dots\dots\dots$
 - ★ La population finit par osciller près de trois valeurs si $k = \dots\dots\dots$

1. une formule dans un tableur commence par le symbole « = »
 2. le copier-glisser décalera toutes les lettres et les nombres qui apparaissent dans les formules, sauf ceux qui sont précédés du symbole \$. (références absolues)
 3. clic gauche sur l'axe pour le paramétrer
 4. Affichage > barre d'outils > Contrôle de formules; (indiquer dans l'onglet *données* la cellule $A1$. Cliquer sur l'icône (Des)activer le mode de conception une fois la barre définie)

PARTIE C : EFFET PAPILLON

L'effet papillon exprime le phénomène de sensibilité aux conditions initiales en théorie du chaos : « Un simple battement d'ailes d'un papillon peut-il déclencher une tornade à l'autre bout du monde ? »

- ① Construire une barre de défilement qui fait varier $A3$ entre 0 et 100, remplacer $K3$ par « = $A3/100$ ». Observer l'évolution du graphique avec u_0 .
- ② Compléter :
 - ★ Le comportement de (u_n) dépend peu de u_0 si $k \in \dots\dots\dots$
 - ★ Le comportement de (u_n) dépend beaucoup de u_0 si $k \in \dots\dots\dots$
- ③ On suppose que $k = 4$ et $u_0 = 0,75$ à $0,01$ près. Peut on prévoir raisonnablement l'évolution de la population ? Pourquoi ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....

PARTIE D : DIAGRAMME DE BIFURACTION

- ① Mettre k à 0. Entrer dans $L1$ la formule = $K1 + 0,01$, et dans $L3$ la formule = $K3$, puis copier la colonne $K4 : K143$ sur $L4 : L143$.
- ② Copier la colonne L sur les colonnes M à OU (très loin à droite).
- ③ Afficher un graphique dont les valeurs sont en lignes $K1 : OU1$; $K135 : OU143$ avec k en abscisse (gradué de 0 à 4) et les valeurs asymptotiques de la suite en ordonnée (gradué de 0 à 1). Ne pas afficher de légende, être patient.
- ④ Expliquer pourquoi on peut considérer que ce graphique affiche la limite de la suite (u_n) en fonction de k (ou « les limites » -ce qui est inexact car une suite ne peut admettre qu'une limite, on parle en fait des « valeurs d'adhérence » de la suite).