Fiche 6 : Exponentielle et continuité -11-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Les exercices sont regourpés par thèmes. Les questions 1) à 3) sont indépendantes et de difficulté croissante.

Exercice 1. Équations

Résoudre les équations suivantes :

① $e^{3x} - 1 = 0$ et $e^3 e^{-x} > \frac{1}{e}$ ② $e^{x^2} = \sqrt{e}$ et $e^{2x} - \dfrac{1}{e} > 0$ ③ $e^{2x} - xe^x > e^x$ et $e^{3x} + e^x - 2 = 0$

Exercice 2. Limites

① Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $\dfrac{e^{-2x}}{e^{3x}+2}$.

② Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $(x + e^x)e^{-x}$.

③ Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-3x} - e^{x^2}$.

Exercice 3. Tangentes

Déterminer la tangente au point d'abscisse a et la position relative de cette tangente avec la courbe de f :

① $a = 0$, $f(x) = e^x$ ② $a = \frac{1}{2}$ et $f(x) = e^{-2x+1}$. ③ $a = 1$ et $f(x) = e^{x^2-1}$

Exercice 4. Théorème de la bijection et exponentielle

① Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter.
   (b) Montrer que f est dérivable et que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
   (c) Dresser le tableau de variations complet de f.
   (d) Prouver que l'équation $f(x) = -5$ admet exactement une solution sur $]-\infty; 1]$ puis sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée à 0,1 près de cette solution.

② Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1} + 2x - 1$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter.
   (b) Expliquer pourquoi f est dérivable et montrer que $f'(x) = 2(e^{2x+1} + 1)$.
   (c) Dresser le tableau de varitions complet de f.
   (d) Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée de α à 0,01 près.
   (e) En déduire le signe de $f(x)$.
   (f) Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x+1} + x^2 - x$. Dresser le tableau de variation de g. (les limites ne sont pas exigées).

③ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x+4} + 2x - 4$. Dresser le tableau de variations complet de f et prouver que $f(x) = 2$ admet deux solutions, dont on donnera des valeurs approchées au millième.

Exercice 5. Récurrence et exponentielle

Soit f dérivable sur un intervalle I. On note $f^{(n)} = f''^{\cdots\prime}$ (n dérivations successives). $f^{(0)} = f$.

① Soit $f(x) = e^{2x}$. Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.

② Soit $f(x) = xe^x$.
   (a) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
   (b) Conjecturer $f^{(n)}(x)$ et prouver la conjecture par récurrence.

③ Soit $f(x) = (x^2 - 4x - 7)e^{\frac{x}{2}}$. Conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$ et prouver la conjecture.

Exercice 6. Prolongement par continuité

Peut-on prolonger f par continuité en 0 si f est définie sur $]0; +\infty[$ par

① $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ ② $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ③ $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$