Fiche 4 : problème d'optimisation -04-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

Questions détaillées (selon Bac S Nouvelle-Calédonie juin 2005)

Partie A : les 3 premières questions sont indépendantes. ($\approx$ 35 min.)
Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{7}{2} + 2\tan(x) - \frac{4}{\cos(x)}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

① Montrer[1] que pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{7}{2} + \frac{2\sin(x) - 4}{\cos(x)}$. En[2] déduire $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat. (en terme d'asymptote)

② Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que[3] pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{2(1 - 2\sin(x))}{(\cos(x))^2}$.

③ Résoudre $1 - 2\sin(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $\mathcal{D}_f$.

④ En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$ et dresser son tableau de variation complet. Indiquer la valeur approchée du maximum de f.

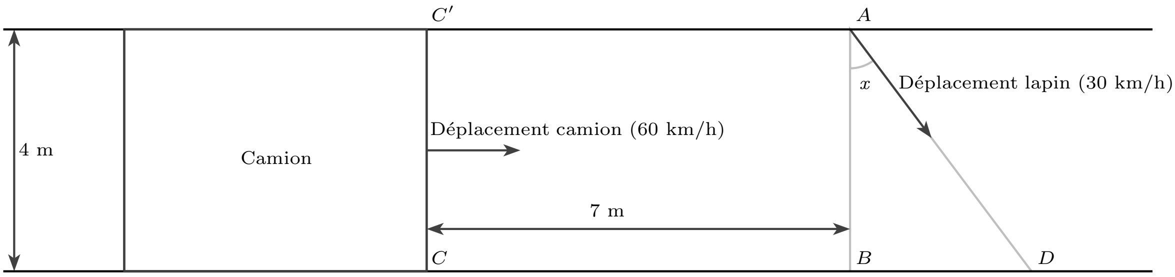
Partie B : seule la question 4 fait appel aux résultats du A. ($\approx$ 20 min).

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion arrive à sa rencontre à 60 km/h.

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci dessous.

Le lapin décide de traverser alors que le camion est à 7 mètres de lui. Il part du point A en direction du point D en ligne droite, à 30 km/h.

Cette direction est repérée par l'angle $x = \widehat{BAD}$ avec $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.



① Convertir la vitesse du camion et celle du lapin en m/s.

② Déterminer AD et CD en fonction de x. (trigo dans le triangle rectangle ABD).

③ En déduire les temps (en seconde) t_l et t_c mis par le lapin et par le camion pour parcourir respectivement AD et CD.

④ En déduire que le lapin survit si et seulement si $f(x) > 0$. En déduire une valeur de x qui lui permet de survivre[4]

⑤ Donner, à l'aide de la calculatrice et sans justifier, l'intervalle angulaire pour x qui assure la survie du lapin. On donnera des valeurs en radian puis en degré, arrondies au degré près.

1. on pourra partir du second membre et réduire au même dénominateur
2. Calculer séparement le numérateur et le dénominateur. Vérifier que la situation nécessite une étude de signe, dans laquelle on tiendra compte de $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$.
3. formule trigo $\cos^2 + \sin^2 = \ldots$
4. utiliser le tableau de variations de la partie A.

Fiche 4 : problème d'optimisation -04-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

Questions moyennement détaillées (selon Bac S Nouvelle-Calédonie juin 2005)

Partie A

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{7}{2} + 2\tan(x) - \frac{4}{\cos(x)}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

① Montrer que pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{7}{2} + \frac{2\sin(x) - 4}{\cos(x)}$. En déduire $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

② Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{2(1 - 2\sin(x))}{(\cos(x))^2}$.

③ Résoudre $1 - 2\sin(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $\mathcal{D}_f$.

④ En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$ et dresser son tableau de variation complet. On indiquera notamment la valeur exacte et simplifiée du maximum de f.

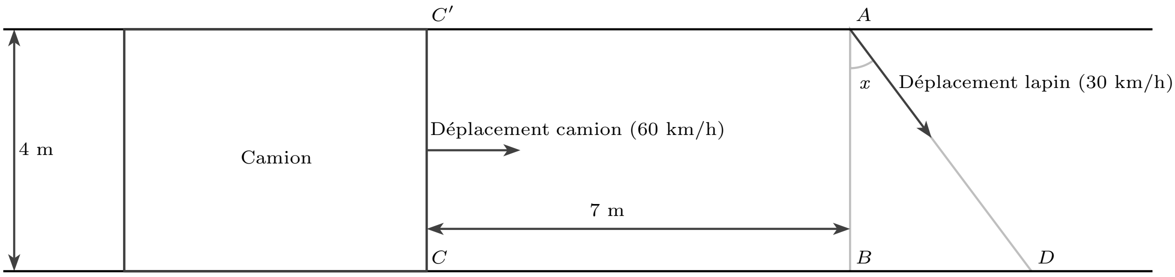
Partie B

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion arrive à sa rencontre à 60 km/h.

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci dessous.

Le lapin décide de traverser alors que le camion est à 7 mètres de lui. Il part du point A en direction du point D en ligne droite, à 30 km/h.

Cette direction est repérée par l'angle $x = \widehat{BAD}$ avec $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.



① Convertir la vitesse du camion et celle du lapin en m/s.

② Déterminer AD et CD en fonction de x.

③ En déduire les temps (en seconde) t_l et t_c mis par le lapin et par le camion pour parcourir respectivement AD et CD.

④ En déduire que le lapin survit si et seulement si $f(x) > 0$. En déduire une valeur de x qui lui permet de survivre.

⑤ Donner, à l'aide de la calculatrice et sans justifier, l'intervalle angulaire pour x qui assure la survie du lapin. On donnera des valeurs en radian puis en degré, arrondies au degré près.

FICHE 4 : PROBLÈME D'OPTIMISATION -04-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

QUESTIONS PEU DÉTAILLÉES (selon Bac S Nouvelle-Calédonie juin 2005)

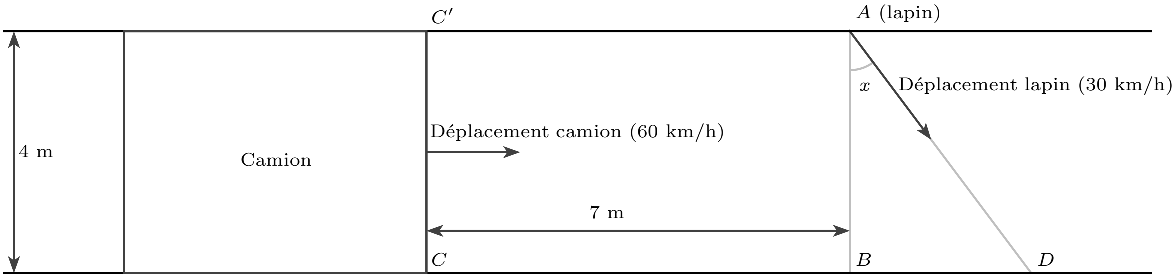
Partie A : les 3 premières questions sont indépendantes

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{7}{2} + 2\tan(x) - \frac{4}{\cos(x)}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Dresser le tableau de variations complet de f, en justifiant soigneusement chaque élément.

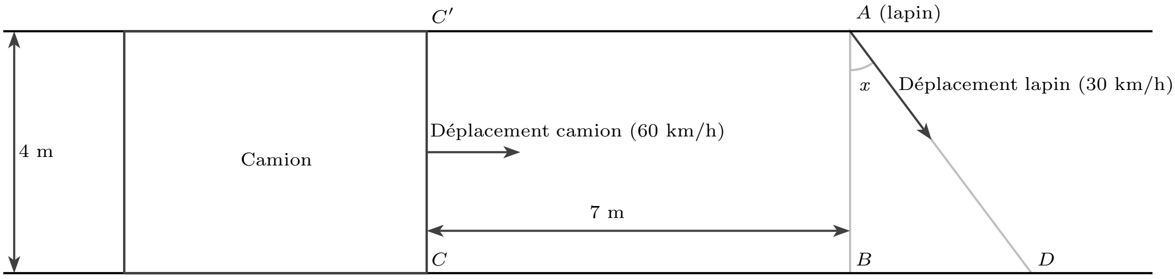
Partie B



Montrer que le lapin survit si et seulement si $f(x) > 0$. Trouver une valeur de l'angle x pour laquelle le lapin survit, puis, à la calculatrice, l'ensemble de ces valeurs en degrés. (au degré près)

FICHE 4 : PROBLÈME D'OPTIMISATION -04-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

QUESTIONS TRÈS PEU DÉTAILLÉES (selon Bac S Nouvelle-Calédonie juin 2005)



Le lapin peut-il survivre ? Pour quel(les) valeurs de x ?

Correction de la fiche 4 -04-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

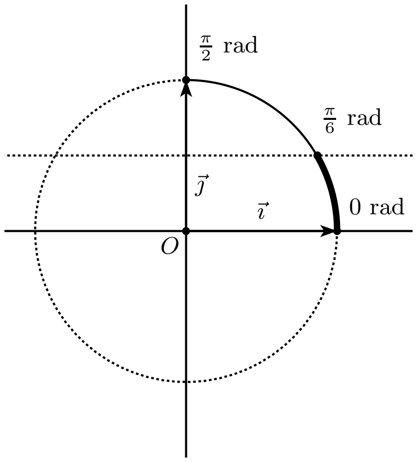
A1. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{7}{2} + 2\tan(x) - \dfrac{4}{\cos(x)} = \dfrac{7}{2} + 2\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} - \dfrac{4}{\cos(x)} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2\sin(x)-4}{\cos(x)}$.
Or $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\sin(x) - 4 = -2$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$ avec $\cos(x) > 0$ (car $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$) donc :
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin(x)-4}{\cos(x)} = -\infty$ et par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty}$: $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

A2. f est dérivable comme somme d'une constante (7/2) et d'un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$, dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = 0 + \frac{(2\cos(x)) \times \cos(x) - (2\sin(x)-4) \times (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{2(\cos^2(x)+\sin^2(x)) + 4\sin(x)}{(\cos(x))^2}$$

$\boxed{f'(x) = 2\dfrac{(1-2\sin(x))}{(\cos(x))^2}}$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

A3. $1 - 2\sin(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2} \geqslant \sin(x)$.
Or sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{2} = \sin(x) \iff x = \frac{\pi}{6}$ et la fonction sinus est strictement croissante sur cette intervalle, donc :
$1 - 2\sin(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2} \geqslant \sin(x) \iff x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$

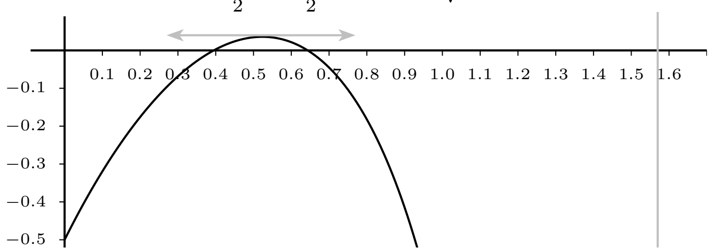


A4. Ainsi, $f'(x)$ étant du signe de $1 - 2\sin(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-0,5$	$\nearrow$	$3,5-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3,5 + 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3,5 - \frac{6}{\sqrt{3}} = 3,5 - 2\sqrt{3}.$$

A5.



Remarque : la courbe s'approche lentement de son asymptote verticale (se qui explique l'écart sur le graphique.

B1. La vitesse du camion est $v_c = 60\frac{km}{h} = 60\frac{1000\ m}{3600\ s} = \frac{50}{3}\ m/s$ (soit environ $16,6\ m/s$).
La vitesse du lapin est de $30\frac{km}{h}$ (deux fois moins que celle du camion) donc $v_\ell = \frac{25}{3}\ m/s$ (environ $8,3\ m/s$).
B2. Dans le triangle BAD rectangle en B, on a : $AB = AD\cos(\hat{A})$ or $AB = 4$ et $\hat{A} = x$ donc $AD = \frac{4}{\cos x}$ mètres.
De même, dans le triangle BAD rectangle en B, $\tan(\hat{A}) = \frac{BD}{AB}$ donc $BD = 4\tan x$ mètres.
B3. La distance parcourue par le lapin est $d_\ell = AD$. Ainsi, il lui faut $t_\ell = \dfrac{d_\ell}{v_\ell} = \dfrac{4}{\cos x} \times \dfrac{3}{25}$ s pour atteindre D.
La distance parcourue par le camion est $d_c = CB + BD = 7 + 4\tan x$. Ainsi, le temps de parcours pour atteindre D est de $t_c = \dfrac{d_c}{v_c} = (7 + 4\tan x) \times \dfrac{3}{50} = \left(\dfrac{7}{2} + 2\tan x\right) \times \dfrac{3}{25}$.
B4. Le lapin survit si et seulement s'il atteint D avant le camion

$$\iff t_c > t_\ell \iff t_c - t_\ell > 0 \iff \left(\frac{7}{2} + 2\tan x - \frac{4}{\cos x}\right) \times \frac{3}{25} > 0 \iff f(x) > 0.$$

Or $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3,5 - 2\sqrt{3} > 0$ (car $3,5^2 = 12,25 > 12 = (2\sqrt{3})^2$), donc le lapin survit pour un angle de $\frac{\pi}{6}$ radians.

B5. On programme la calculatrice et à l'aide du tableau de valeurs, on observe que $f(x) = 0$ a deux solutions qui sont à 10^{-2} près : $x_1 \approx 0,39$ et $x_2 \approx 0,64$ radians. D'après le tableau de variations, le lapin survit pour un angle x en radians situé entre $0,39$ et $0,64$ radians, et après conversion ($\times 180/\pi$) et arrondi (à l'excès pour la valeur minimale, et par défaut pour la valeur maximale!), entre 23 et 36 degrés.