FEUILLE D'EXERCICES 8 -11-10-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Moyenne arithmetico-géométrique

Soient a et b deux nombres réels positifs.
La moyenne arithmétique de a et b est le nombre $m_A = \dfrac{a+b}{2}$.
La moyenne géométrique de a et b est le nombre $m_G = \sqrt{ab}$.
On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

① Démontrer que pour tous $x, y \in [0; +\infty[$ on a : $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. (on pourra partir du signe de $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$).

② Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

③ Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

④ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant v_n$ et $v_0 \geqslant u_n$.

⑤ Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent. On notera ℓ et ℓ' leurs limites respectives.

⑥ Démontrer que $\ell = \ell'$. Cette limite commune est appelée moyenne arithmetico-géométrique de a et b.(on pourra partir de $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$).

⑦ Calculer la moyenne arithmetico-géométrique de a et a puis de a et 0.

⑧ Écrire un algorithme qui :
- ⋆ fait saisir deux réels positif A, B et un entier N.
- ⋆ utilise la variable k et les variables U et V qui prendront les valeurs de u_K et v_K dans une boucle.
- ⋆ affiche finalement U et V les valeurs de u_N et v_N.

⑨ Utiliser cet algorithme pour obtenir une valeur approchée de la moyenne arithmetico-géométrique de 12 et 19 à 10^{-3} près.

EXERCICE 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

① On suppose $u_1 \leqslant u_0$. Montrer par récurrence que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Qu'en conclure ?

② Si $u_1 \geqslant u_0$, que dire de (u_n) ? (pas de démonstration demandée)