FEUILLE D'EXERCICES 7 -09-10-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Aspects théoriques de la suite logistique

Soit $k \in [0;4]$ fixé. On définit la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto k\,x(1-x)$. On note $\mathcal{P}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.
La suite (u_n) est définie par $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

① Dresser le tableau de variations de f.

② Donner l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

③ Discuter, en fonction des valeurs de k, de la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

④ On suppose que (u_n) converge. Déterminer les valeurs possibles de sa limite ℓ.

⑤ Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1,\ u_n \in [0; \frac{k}{4}]$.

⑥ On suppose $0 \leqslant k \leqslant 1$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) Prouver que (u_n) converge et déterminer sa limite.

⑦ On suppose $1 < k \leqslant 2$.
   (a) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante à partir de $n = 1$ si $u_1 \geqslant u_0$. Montrer qu'elle est décroissante sinon.
   (b) Prouver que (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 2. Bac S Pondichery avril 2010 (4 points $\sim$ 48 minutes)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

② On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer une expression de S_n en fonction de n.

EXERCICE 3. ROC

① Rappeler la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

② Rappeler la définition d'une suite majorée, en déduire ce qu'est une suite non majorée.

③ Rappeler la définition d'une suite croissante.

④ Montrer que toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.