FEUILLE D'EXERCICES 4 -19-09-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Démonstration par récurrence

En utilisant seulement les propriétés suivantes,
⋆ la dérivée de $x \mapsto x$ (sur $\mathbb{R}$) est la fonction constante égale à 1.
⋆ si u et v sont dérivable sur $\mathbb{R}$ alors uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + v'u$.
démontrer par récurrence que $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée : $x \mapsto nx^{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

EXERCICE 2. Reconnaître des suites

Pour chacune des suites suivantes :
⋆ Dire si elle est arithmétique ou géométrique et préciser sa raison
⋆ Donner sa forme expilcite.
⋆ Donner son premier terme et une définition par récurrence.
⋆ Exprimer $u_0 + \cdots + u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
(certaines de ces infos sont contenues dans l'énoncé...)

① $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
② $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_0 = -1$ et $b_{n+1} = 3b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
③ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $c_n = \frac{n+1}{3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
④ $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d_0 = -1$ et $d_{n+1} = d_n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
⑤ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique telle que $e_3 = 5$ et $e_8 = 20$.
⑥ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison 2 telle que $f_3 = 128$.
⑦ $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 4.
⑧ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique telle que $h_{10} = 10$ et $h_{12} = 20$.

EXERCICE 3. Expression explicite d'une suite arithmetico-géométrique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
① Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant 0$.
② Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
③ Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + 1$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
④ En déduire une expression explicite de (v_n).

EXERCICE 4. Expression explicite

Soit (w_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{w_n + 1}$.
① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$. Déterminer le sens de variation de (w_n).
② Calculer w_0, w_1, w_2, w_3 et w_4.
③ Conjecturer une expression de (w_n) en fonction de n et prouver cette conjecture par récurrence.