Feuille d'exercices 38 -22-05-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Nouvelle Calédonie mars 2003
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère la transformation f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 1.$$

① Déterminer les antécédents du point O.

② Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.

③ Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?

④ Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$. Déterminer l'affixe du point A$'$ image de A par f puis prouver que les points O, A et A$'$ sont alignés.

⑤ Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ et N le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(a) Montrer que N appartient au cercle (X) de centre O et de rayon 1.

(b) Lorsque θ varie, montrer que N', image du point N par f reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

(c) Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{O}N'} = 2\cos\theta\ \overrightarrow{\mathrm{O}N}$. En déduire que les points O, N et N' sont alignés.

(d) Expliquer la construction du point N'.

Exercice 2. Amérique du Sud novembre 2009
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

① (a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $(1+\mathrm{i})$.

(b) Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.

(c) Établir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.

② Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est à dire l'ensemble des points tels que M'=M).

On cherche à généraliser les propriétés ①b et ①c pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

③ (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.

(b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.

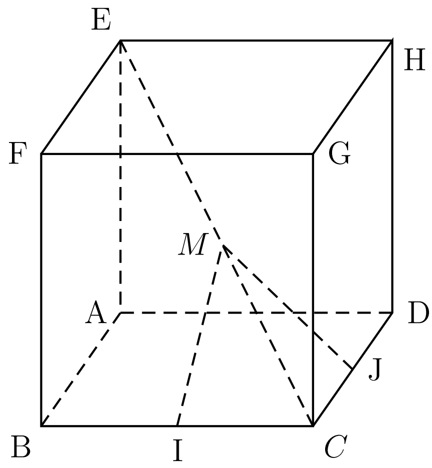
(c) Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

④ Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question ①c.

⑤ Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\mathrm{i}$.

EXERCICE 3. Centres étrangers juin 2011

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(\text{A} \;;\; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



① (a) Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

(b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\;;\;1-t\;;\;t)$.

② (a) Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

(b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

(c) Exprimer $\text{I}M^2$ en fonction de t.

③ Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ est maximale.
On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$.

(a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\;;\;\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

(b) En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur $\text{I}M$ est minimale.

(c) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

(d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ soit maximale.

(e) Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].