Feuille d'exercice 32 -17-04-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

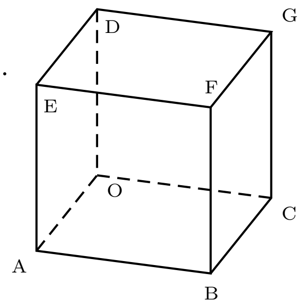
Exercice 1. selon Polynésie septembre 2009

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Soient les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$; $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ et $-\overrightarrow{\mathrm{BR}} + 2\overrightarrow{\mathrm{FR}} = \vec{0}$.
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$.

① (a) Démontrer que le point R a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,2)$.
(b) Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
(c) Quelle est la nature du triangle PQR ?

② (a) Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.
(b) Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).

③ On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).
(a) Déterminer un système paramétrique de la droite (DH).
(b) Déterminer les coordonnées du point H.
(c) Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



Exercice 2. selon Nouvelle-Calédonie novembre 2009

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère un cube ABCDEFGH ($ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces et $[AE]$ une arête).
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

① Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

② Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

③ (a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
(b) En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$. Placer le point R sur la figure.

④ Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK).

Exercice 3. Métropole septembre 2005

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

① On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $\mathrm{B}(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-2\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.
(a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.
(b) Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $\mathrm{C}(-1\ ;\ 4\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.
(c) Soit le point $\mathrm{A}(5\ ;\ -2\ ;\ -1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.
(d) Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

② (a) Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1{+}2t\ ;\ 3{-}t\ ;\ t)$. Déterminer en fonction de t la longueur $\mathrm{A}M$. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(b) Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.
(c) Interpréter géométriquement la valeut de ce minimum.

EXERCICE 4. Pondichery avril 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

① La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.

② Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.

③ Les droites de représentations paramétriques respectives
$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 7+2u \\ y = 2+2u \\ z = -6-u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

④ On considère les points :
A, de coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, B, de coordonnées $(1\ ;\ 4\ ;\ 0)$, et C, de coordonnées $(3\ ;\ -4\ ;\ -2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.

⑤ On considère les points :
A, de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 3)$, B, de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$, et C, de coordonnées $(4\ ;\ -1\ ;\ 5)$.
Les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 5. Amérique du Sud novembre 2007

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

① On considère le point A de coordonnées $(-2\ ;\ 8\ ;\ 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\ ;\ 5\ ;\ -1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

② On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives
$x-y-z=7$ et $x-2z=11$.
Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').
Montrer que le vecteur de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de (d').

③ Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

④ On considère le point H de coordonnées $(-3\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3\ ;\ 0\ ;\ -4)$.

(a) Vérifier que H appartient à (d) et que H$'$ appartient à (d').

(b) Démontrer que la droite (HH$'$) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

(c) Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH$'$.

⑤ Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{M\mathrm{H}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HH}'} = 126$.