# Feuille d'exercices 28 -28-02-13-
# Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

**Exercice 1.** Antilles-Guyane juin 2009

On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

① On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(1+x)$.

(a) En étudiant les variations de la fonction $f$, montrer que, pour $x \geqslant 0$ : $\ln(1+x) \leqslant x$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

(c) La suite $(u_n)$ peut-elle avoir pour limite $+\infty$ ?

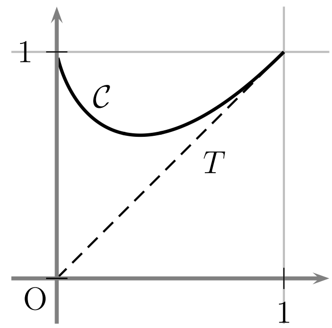
② On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

(a) On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer $v_n$ en fonction de $x$.

(b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ? Aucune justification n'est demandée. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 2.** Antilles-Guyane septembre 2009




Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;1]$ par : $f(x) = 1 + x\ln x$.
On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.
$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
$T$ est la droite d'équation $y = x$.
La courbe $\mathcal{C}$ et la droite $T$ sont représentées sur le schéma ci-dessous.

① (a) Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(b) En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0;1]$, montrer que, pour tout $x \in ]0;1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.

② (a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in ]0\ ;\ 1]$.

(b) Vérifier que la droite $T$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

③ On note $g$ la fonction définie pour tout nombre réel $x \in ]0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x - x.$$

(a) Étudier les variations de $g$ sur l'intervalle $]0;1]$ et dresser le tableau de variation de $g$. On ne cherchera pas la limite de $g$ en 0.

(b) En déduire les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $T$.

④ Soit $\alpha$ un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 [1 - f(x)]\ \mathrm{d}x$.

(a) Montrer que la fonction $H$ définie sur $]0;1]$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive de $1-f$.

(b) Calculer $I(\alpha)$ puis $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.

(c) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

(d) À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, la droite $T$ et l'axe des ordonnées.