Feuille d'exercices 26 -22-02-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Amérique du Sud novembre 2008 : 3 points

On demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, positive sur $[1;+\infty[$, et

- $\star$ $\ln(1) = 0$.
- $\star$ Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- $\star$ Pour tout réel strictement positif x, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $\star$ $\ln(2) \approx 0{,}69$ à10^{-2} près.

① On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

(a) Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

(c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

② Soit un entier $n > 0$. On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}$.

En utilisant la question ①, déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

Exercice 2. selon Nouvelle Calédonie novembre 2012

Partie A Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

① (a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

(c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$.

(d) En déduire la limite de f en $+\infty$.

(e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

② (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) Après avoir vérifié que $\alpha \in [14\,;\,15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

(c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{cases}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$.

① À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variations de la suite (u_n).

② (a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question ②a.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

(d) Démontrer alors la conjecture émise à la question ① de la partie B.

(e) En utilisant la question ②a de la partie A, justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

③ On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5 ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

(a) Justifier que cet algorithme se termine.

(b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).