

FEUILLE D'EXERCICES 25 -21-02-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Définition du logarithme

- ① Rappeler, sans justifier, le tableau de variations complet de la fonction exponentielle.
 - ② En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel que l'on notera $\ln(x)$ (logarithme népérien de x) tel que $e^{\ln(x)} = x$.
- Dans la suite, on désigne par $\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$.

EXERCICE 2. Propriétés algébriques

- ① Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. (montrer l'égalité de l'exponentielle de chacun des membres et conclure).
- ② Calculer $\ln(1)$ et $\ln(e)$.
- ③ Démontrer que pour tous $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. (même méthode qu'en ①)
- ④ En déduire : $x, y > 0$, $\ln(1/x) = -\ln(x)$ et $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
- ⑤ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

EXERCICE 3. Variations

On admet que la fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$.

- ① Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{\ln(x)}$. Simplifier h et déterminer deux expressions de $h'(x)$, en déduire $\ln'(x)$.
- ② Quel est le sens de variations de \ln ?
- ③ Si $u : I \rightarrow]0; +\infty[$ est dérivable, montrer que $\ln(u)$ est dérivable et calculer sa dérivée.

EXERCICE 4. Limites et croissances comparées

- ① Rappeler la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. En déduire cette limite.
- ② En posant $X = 1/x$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$.
- ③ Rappeler $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$. (poser $X = \ln(x)$).
- ④ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$.
- ⑤ Déduire de ce qui précède : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$.

EXERCICE 5. Applications

- ① Déterminer le tableau de signes de $\ln(x)$.
- ② Résoudre $e^{2x+1} - 3 > 0$.
- ③ Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$. (poser $X = \dots$)
- ④ Étudier la fonction $x \ln(x)$.
- ⑤ Étudier la fonction $\ln(1 - x^2)$.
- ⑥ Calculer $\int_1^e \frac{dx}{x}$.