

FEUILLE D'EXERCICES 24 -19-02-13-  
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. selon Amérique du Sud novembre 2009

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère l'événement :

★  $T_n$  : « le manchot utilise le toboggan lors de son  $n$ -ième passage. »

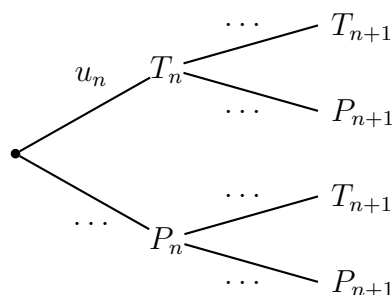
★  $P_n$  : « le manchot utilise le plongoir lors de son  $n$ -ième passage. »

On considère alors la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $u_n = p(T_n)$  où  $p(T_n)$  est la probabilité de l'événement  $T_n$ .

- ① (a) Donner les valeurs des probabilités  $p(T_1)$ ,  $p(P_1)$  et des probabilités conditionnelles  $p_{T_1}(T_2)$ ,  $p_{P_1}(T_2)$ .

- (b) Montrer que  $p(T_2) = \frac{1}{4}$ .

- (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



- (d) Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 0,1 u_n + 0,2$ .

- (e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de  $(u_n)$ .

- ② On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $v_n = u_n - \frac{2}{9}$ .

- (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{10}$ . Préciser son premier terme.

- (b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

- (c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Ce résultat valide-t-il la conjecture émise en ①e ?