Terminale S1 2012-2013 -01-02-13-
Feuille d'exercices 21, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Centres étranger juin 2010

Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a=-1$ et l'application f, du plan $(\mathcal{P})$ dans lui·même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z'=\frac{\mathrm{i}z}{z+1}.$$

① Déterminer l'affixe des points M tels que $M'=M$.

② Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\mathrm{O}M'=\frac{\mathrm{O}M}{\mathrm{A}M} \text{ et } \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right)=\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{O}}\right)+\frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

③ (a) Soit B le point d'affixe $b=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$.
Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].

(b) Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B′ image du point B par f.
Établir que B′ appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.
Placer le point B′ et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ dans le repère.

(c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

(d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (On laissera apparents les traits de construction.)

④ On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

(a) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels tels que $(x,\ y)\neq(-1,\ 0)$ et $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$.
Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à : $\mathrm{Im}\,(z')=\dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer.

(b) À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

Exercice 2. Amérique du Nord mai 2012

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

① Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M)=M$.

② Soit A le point d'affixe $a=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

(a) Exprimer a sous forme exponentielle.

(b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

③ Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit imaginaire pur.

④ Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle issocèle direct en Ω.

(a) À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2-iz-1+i=0$ et $z\neq 1$.

(b) Montrer que $z^2-iz-1+i=(z-1)(z+1-i)$.

(c) En déduire l'ensemble Γ_3.

⑤ Soit M un point d'affixe z différente de 0 et e 1.

(a) Exprimer $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction d'un argument de z.

(b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.