Feuille d'exercices 20 -29-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. selon le bac S Pondichery avril 2012

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.

ROC : Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$

① Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = -2 + \mathrm{i}$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{\mathrm{C}'}$ du point C′ image de C par la transformation f, et représenter C et C′.
   (b) Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.

② Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

③ Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.

④ Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

⑤ Soit $D(-0{,}5 - 0{,}2i)$. Construire, sans calculs, son image D′ par la transformation f.

Exercice 2. selon le bac S Amérique du Sud novembre 2011

① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

② Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1+2\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$, $z_{\mathrm{C}} = 1+\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{C}}}$.
   (a) Placer les points A et B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   (b) Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.

③ Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

④ Construire les points C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. Expliquer la construction proposée.

Exercice 3. selon le bac S Liban mai 2012

① **Un triangle**
   (a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
   (b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

② **Une transformation du plan.** On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_O = 0$, et telle que : pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + 2$. On note alors A_n le point d'affixe z_n.
   (a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives : $3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $2\mathrm{i}\sqrt{3}$
   On remarquera que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.
   (b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.
   (c) établir que pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$,.
   (d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par la rotation de centre ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   (e) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

③ *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.