Feuille d'exercices 19 -22-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. selon Métropole juin 2012

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z \neq -1$, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

① Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -\dfrac{1}{2}$, $\quad z_B = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$ et $\quad z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

(a) Placer les trois points A, B et C sur une figure.
(b) Calculer les affixes des points $A' = f(A), B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et représenter A', B'et C'.
(c) Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

② Soit $g(z)$ l'affixe du point M_1, image du point M d'affixe z par la translation de vecteur $\vec{u}$.

(a) Exprimer $g(z)$ en fonction de z.
(b) Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathcal{D}_1$, image de la droite $\mathcal{D}$ par g.
(c) Démontrer que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$.

③ Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

(a) Justifier que $h(A_1) = A', h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.
(b) Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|$.
(c) En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.

④ Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 2. selon Nouvelle Calédonie mars 2012

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

① Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

② (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
(b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives : $z_A = 1+\mathrm{i}$, $\quad z_B = 1-\mathrm{i}$, $\quad z_J = \mathrm{i}\sqrt{2}$ $\quad$ et $z_K = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$.

① Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

② Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

③ Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

④ Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + \mathrm{i}$.

(a) Déterminer une mesure de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OD})$.
(b) Soit C l'image du point L par la rotation de centre O et d'angle θ. Montrer que $\dfrac{z_C}{z_L} = e^{i\theta}$.
En déduire l'affixe du point C.

⑤ Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.