Feuille d'exercices 18 -16-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Équation de degré 2 et parallélogramme

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient $A(1+2i)$ et B et D les points dont les affixes sont les solutions de $z^2-3z+6=0$. ($\Im m(z_B)>0$).
Déterminer l'affixe de C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 2. Équations

① Résoudre $(1+i)z=3+i-4z$.

② Résoudre $z^2+4z+5=0$.

③ Résoudre $2z^3+(1-6i)z^2+(5-3i)z-15i$ sachant que l'équation admet une racine imaginaire pure.

Exercice 3. Théorème de Varignon

Les *médianes* d'un quadrilatère sont les segments qui joignent les milieux de ses côtés opposés.
Le théorème de Varignon affirme que les médianes d'un quadrilatère se coupent en leurs milieux.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient A,B,C,D d'affixes respectives a,b,c,d. Exprimer en fonction de a,b,c,d les affixes des milieux des médianes de $ABCD$ et prouver le théorème de Varignon.

Exercice 4. cosinus et sinus d'un angle remarquable

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe sous forme algébrique.

① Déterminer la forme algébrique de z^2 et son module.

② Quel est le module de $1+i$? Résoudre $z^2=1+i$.

③ Mettre $1+i$ sous forme trigonométrique.

④ En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

Exercice 5. image d'un cercle par une transformation complexe

① pour tout $\theta\in]0;2\pi[$, soit $z=e^{i\theta}$. Quel ensemble décrit le point M d'affixe z ?

② Montrer à l'aide des formules d'Euler que $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin(\frac{\theta}{2})}$.

③ En déduire : $\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{i}{2}\times\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}+\dfrac{1}{2}$.

④ Dresser le tableau de variations complet de $f:]0;2\pi[\to\mathbb{R},\ \theta\mapsto\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

⑤ Quel ensemble parcourt le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z-1}$?