Feuille d'exercices 17 -10-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Contexte : résoudre les équations de degré 3 : $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ($a \neq 0$), au début du 16ème, en Italie.

Exercice 1. Simplificiation du problème

① Montrer que l'équation $ax^3+bx^2+cx+d \iff x^3+b'x^2+c'x+d'=0$ (*) où les coefficients b', c', d' sont à déterminer en fonction de a, b, c et d.

② En posant $x = X - \dfrac{b'}{3}$ dans (*), montrer qu'il suffit de savoir résoudre les équations du type $X^3-pX-q=0$ (**), où p et q sont à déterminer en fonction de b', c' et d'.

Exercice 2. Etude de la fonction $f : x \mapsto x^3 - px - q$

① Dans le cas $p \leqslant 0$: montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

② Dans le cas $p > 0$:

(a) Dresser le tableau de variation de f et calculer les valeurs exactes A et B des 2 extrema locaux en fonction de p et q.

(b) Montrer que $AB = \dfrac{D}{27}$ où $D = 27q^2 - 4p^3$.

(c) En déduire le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$ en fonction du signe de D.

Exercice 3. La méthode dite de Cardan(o) : du degré 3 vers le degré 2

① Montrer que $(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$ pour tous réels u et v.

② Montrer que si $u^3+v^3=q$ et $uv = \dfrac{p}{3}$, alors $u+v$ est solution de (**).

③ Développer $(x-a)(x-b)$. En déduire que les solutions du système : $\begin{cases} a+b = S \\ ab = P \end{cases}$ sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$.

④ Déduire des deux questions précédentes que si u^3 et v^3 sont solutions de $X^2-qX+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3=0$ alors $u+v$ est une solution de $x^3-px-q=0$.

⑤ Calculer Δ et commenter.

⑥ Dans le cas $D>0$, donner l'unique solution de (**).

Exercice 4. Le cas $D<0$: le génie de Bombelli

Dans le cas où $D<0$, la méthode de Cardan semble être une impasse. Pour comprendre sa méthode et ses idées, considérons le cas historique suivant : $x^3-15x-4=0$ (***), c'est à dire avec $p=15$ et $q=4$.

① Calculer $\dfrac{D}{27}$ et donner son signe.

② En introduisant, comme Bombelli, le nombre (imaginaire...) $i=\sqrt{-1}$ (la notation i est due à Euler bien plus tard), calculer en fonction de i la solution obtenue par la méthode dite de Cardan.

③ Développer les quantités $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$. Conclure.

④ Résoudre complètement (***).

Et après ? Ferrari, un élève de Cardano, trouve ensuite une méthode pour résoudre les équations de degré 4 vers 1540. Galois, en 1831, démontre notamment qu'il est impossible de résoudre les équations de degré supérieur de manière exacte en général.