Feuille d'exercices 15 -11-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Partie A. Continuité et limites

① ♥ Démontrer : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ à partir des résultats suivants :
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.
- $e^0 = 1$

② En déduire que la fonction f est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

③ Déterminer la limite de f en $-\infty$ et l'interpréter en terme d'asymptote.

④ Montrer que pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$ puis que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Partie B. Variations

① ♥ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$ et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

② Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et que pour $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - (x+1))}{(e^x - 1)^2}$

③ Dresser le tableau de variations complet de f.

④ Montrer que l'équation $f(x) = e$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième.

Partie C. Une famille de droites.

Soit x un réel non nul et la droite $\mathcal{D}_x = (MM')$ où : $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$.

① Établir que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. En déduire la valeur de $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2x}$.

② Montrer que lorsque $x \neq 0$, les droites $\mathcal{D}_x$ sont parallèles entre elles.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie[1] par $f(x) = \dfrac{e^x + e - 2}{e^{-x} - e}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

① ♥ Prouver que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous réels x, y en utilisant (sans les démontrer) les résultats suivants :

⋆ exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

⋆ $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② *Études de signes*

(a) Calculer $f(0)$.

(b) Dresser le tableau de signes de $e^{-x} - e$.

(c) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $-e^{2x+1} + 2e^x + e - 2 = (e^{x+1} + e - 2)(1 - e^x)$.
En déduire que $-e^{2x+1} + 2e^x + e - 2$ est du signe de $1 - e^x$, que l'on déterminera.

③ *Ensemble de définition et limites.* (on pourra utiliser ②b)

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$. Interpréter.

(c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter.

④ **Variations et courbe**.

(a) Prouver : f dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(-e^{2x+1} + 2e^x + e - 2)}{(e^{-x} - e)^2}$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.

(b) Déduire de $2(c)$ le tableau de variations complet de f.

(c) Représenter $\mathcal{C}$ et ses éléments remarquables (unité graphique : 2 cm).