FEUILLE D'EXERCICES 13 -04-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

Objectif : étudier les propriétés d'une fonction, notée exp, telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

EXERCICE 1. Existence : méthode d'Euler

① Rappeler la formule d'approximation en x d'une fonction dérivable : $f(x+h) \approx \dots$

② En déduire, par récurrence sur $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, que $\exp(nh) \approx (1+h)^n$

③ En posant $x = nh$, on obtient $\exp(x) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Soit $e = \exp(0)$. Pour $n = 10^4$, donner une approximation de e (à 10^{-3} près).

On définit ainsi $\exp(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. Il faut s'assurer de l'existence de la limite et du fait que la limite vérifie bien la propriété $\exp' = \exp$ pour démontrer rigoursement l'existence de exp.

EXERCICE 2. Unicité

① Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Montrer que $\exp(u)$ est une fonction dérivable sur I de dérivée $u' \exp(u)$.

② On va montrer : pour tout x : $\exp(-x)\exp(x) = 1$, et $\exp(x) \neq 0$.

(a) Soit h la fonction définie par $h(x) = \exp(-x)\exp(x)$. Calculer $h(0)$.

(b) Montrer que h est dérivable et calculer $h'(x)$. En déduire $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Conclure.

③ On va montrer : exp est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

(a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f' = f$. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x)/\exp(x)$. Donner l'ensemble définition et de dérivabilité de g.

(b) Calculer $g'(x)$. En déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Conclure.

EXERCICE 3. Propriétés algébriques

① On va montrer : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Soit u la fonction définie par $u(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. Calculer $u(0)$.

(b) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $u' = u$.

(c) Conclure.

② On va montrer : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ et : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(b) Conclure.

③ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$. En déduire la même propriété pour $n \in \mathbb{Z}$.

④ Calculer $\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2$. En déduire : $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

EXERCICE 4. Étude de la fonction exp

① Déterminer le sens de variation de la fonction exp.

② On va étudier la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ de exp au point d'abscisse 0.

(a) Déterminer l'équation réduite de la tangente T.

(b) Étudier la fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) - x - 1$.

(c) En déduire la position relative de T et de $\mathcal{C}$.

③ Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)$.

④ Déduire de exercice , question ②a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)$. Interpréter.