

FEUILLE D'EXERCICES 11 : LIMITES -13-11-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Étude d'une homographie

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{3x+2}{2x+1}$. On note \mathcal{H} sa courbe dans un repère orthonormé.

- ① Étudier le domaine de définition et les variations de h .
- ② Préciser les limites aux extrémités des flèches et détailler leur calcul.
- ③ Interpréter les résultats en terme d'asymptote.
- ④ Conjecturer les coordonnées du centre de symétrie de la courbe \mathcal{H} et valider la conjecture.
- ⑤ Représenter l'allure de la courbe \mathcal{H} .

EXERCICE 2. Étude d'une fraction rationnelle

Soit $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2-x^2}{1-2x+x^2}$.

- ① Déterminer les limites de f en 1, $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter ces résultats.
- ② Dresser le tableau de variations complet de f .
- ③ Étudier la position relative de la courbe de f avec son asymptote horizontale.
- ④ Représenter l'allure de \mathcal{H} .

EXERCICE 3. Exemple d'asymptote oblique

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$ et \mathcal{C} sa courbe dans un repère orthonormé.

- ① Déterminer l'ensemble de définition de g .
- ② Prouver qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour $x \neq -2$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
- ③ Étudier la position relative de courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} d'équation $y = x - 2$
- ④ Calculer la limite de $f(x) - (x-2)$ en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.
- ⑤ Démontrer l'existence d'une autre asymptote à \mathcal{C} .
- ⑥ Dresser le tableau de variations complet de f . Représenter l'allure de \mathcal{C} .

EXERCICE 4. Limites

Calculer, en justifiant soigneusement, les limites suivantes :

- ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-x^3}{1+x^2}$
- ② $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2}$
- ③ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12}$
- ④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+7}+2x}$
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{1-x^2}$
- ⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+7}-2x}$
- ⑦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+7}-x}$
- ⑧ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$
- ⑨ Démontrer que la courbe d'équation $y = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ a une asymptote horizontale en $+\infty$.