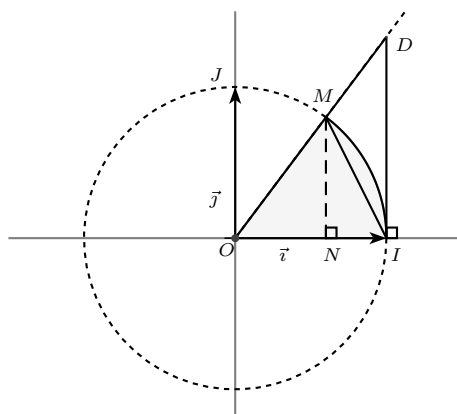


**DEVOIR MAISON 8 -29-11-12-**  
**Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli**

EXERCICE 1. Établir les formules de dérivation de sinus et cosinus

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , soient  $I(1, 0)$ ,  $J(0, 1)$ ,  $M$  de coordonnées polaires  $[1, x]$  où  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . On définit également  $N$  l'intersection de l'axe  $(OI)$  et de la perpendiculaire à  $(OM)$  passant par  $M$  et  $D$  l'intersection de  $(OM)$  et de la perpendiculaire à  $(OI)$  passant par  $I$ .



- ① Exprimer, en fonction de  $x$ , les surfaces des triangles  $OIM$  et  $OID$  ainsi que celle du secteur angulaire  $OIM$ .
- ② En déduire : pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\sin x < x < \tan x$ , puis  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$
- ③ Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$ . Quelle est la parité de  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ? En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .
- ④ Montrer que pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ - \{0\}$ ,  $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{1 + \cos x} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$
- ⑤ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, calculer la limite du taux d'accroissement du sinus en  $x$  lorsque  $h$  tend vers 0. Même question pour cosinus. (on pourra utiliser les formules de duplication et la limites précédentes).
- ⑥ Conclure.

EXERCICE 2. ♣ Facultatif

Trouver deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$  mais telles que  $u(x)v(x)$  n'ait pas de limite en  $+\infty$ .