DM 7 POUR LE -17-11-12-
Terminale S1 , 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Étude de sommes

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit $s_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dots \dfrac{1}{n(n-1)} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$.

On définit aussi pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

① Étude de (s_n).
  (a) Calculer s_5.
  (b) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.
  (c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $s_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
  (d) Déterminer la limite de (s_n). À partir de quel n a-t-on $1 - s_n < 10^{-5}$?

② Étude de (S_n).
  (a) Étudier les variations de (S_n).
  (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $S_n \leqslant 1 + s_n$. En déduire : $S_n \leqslant 2$.
  (c) Montrer que (S_n) converge vers une limite ℓ.
  (d) Écrire l'algorithme d'un programme qui saisi un entier $n \geqslant 1$ et affiche S_n.
  (e) Utiliser le programme pour obtenir une approximation de $S_{1\,000}$ et donner une valeur approchée de $\sqrt{6\, S_{1\,000}}$. Conjecturer la valeur de la limite.

EXERCICE 2. Simuler une loi parfaitement équirépartie

On considère une pièce telle que la propriété de l'évènement F (face) est $\mathbb{P}(F) = x \in]0; 1[$. (la pièce n'est pas nécessairement équilibrée !).
On appelle (E) l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois de suite, de façon indépendante, cette pièce.

① On note D l'évènement « les deux résultats obtenus sont différents »
  (a) Donner un arbre pondéré qui illustre l'expérience (E).
  (b) Exprimer la probabilité de l'évènement R en fonction de x.
  (c) On répète n fois de façon indépendante l'expérience (E) et on note N la variable aléatoire égale aux nombre de fois que l'évènements D réalisés.
  Montrer que $p_n = \mathbb{P}(N = 0) = (2x^2 - 2x + 1)^n$.
  (d) Dresser le tableau de variations de $g :]0; 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - 2x + 1$.
  En déduire $g(x) < 1$.
  (e) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

② Lors d'une expérience (E), on considère l'évènement :
  ⋆ A : « le premier des deux résultats est face et les deux résultats sont différents »
  ⋆ B : « le premier des deux résultats est pile et les deux résultats sont différents ».
  Calculer $\mathbb{P}_D(A)$ et $\mathbb{P}_D(B)$.

③ On répète l'expérience (E) jusqu'à ce que l'évènement D soit réalisé. Peut-on être certain que cela finira par arriver ? Quelle est la probabilité d'obtenir A ? B ? Conclure.