DM 5 pour le -11-10-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Une suite explicite

Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + \cos(n)$. Variations et limite de (u_n) ?

Exercice 2. Comment fonctionne la touche `Frac` ?

L'objectif est d'écrire le nombre 0,27272727... sous forme de fraction.
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}27$ et de raison $\frac{1}{100}$.
Soit (s_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3 ainsi que s_0, s_1, s_2 et s_3. On exprimera les résultats sous forme de nombres décimaux. (avec virgules)
② Donner, sous forme décimale, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.
③ Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer s_n en fonction de n.
④ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ sous forme d'une fraction et conclure.
⑤ 💣 : imiter la démarche pour obtenir l'écriture de 0,481481481... sous forme de fraction.

Exercice 3. Méthode de Héron

L'objectif est de définir une suite permettant le calcul approché de racines carrées par des opérations simples (divisions, sommes, produits).
Soit $a \in [1; +\infty[$ et f la fonction $f :]0\,;\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} + x\right)$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [\sqrt{a}\,; a]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

① Dresser le tableau de variations de la fonction f.
② Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ en faisant apparaître ces valeurs dans le tableau précédent.
En déduire : pour $x \in [\sqrt{a}\,; a]$, $f(x) \in [\sqrt{a}; a]$.
③ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a}; a]$. (on ainsi que $u_n \neq 0$, donc que la suite est bien définie)
④ Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, puis convergente vers une limite ℓ.
⑤ Démontrer que ℓ vérifie $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\ell} + \ell\right)$. En déduire ℓ.
⑥ Dans cette question (seulement), $a = 2$ et $u_0 = 2$. Exprimer u_3 sous forme d'une fraction.
À combien de décimales u_3 approche-t-elle $\sqrt{2}$?
⑦ 💣 dans cette question on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite (u_n).
On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre u_n et $\sqrt{a}$.
On suppose que u_0 approche $\sqrt{a}$ par excès à 0,5 près : $0 \leqslant v_0 \leqslant 0{,}5$.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$. En déduire : $v_{n+1} \leqslant v_n^2$.

(b) Par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n < \dfrac{1}{2^{2^n}}$

(c) En déduire $v_4 < 10^{-4}$. À partir de quel rang n peut-on dire la suite (u_n) approche $\sqrt{a}$ avec une précision de 1 000 décimales ?