

DM 4 POUR LE -05-10-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Suites et géométrie

Dans le plan, on considère deux points distincts O et A_1 du plan.
Le segment $[OA_1]$ est pris pour unité. (ce qui signifie que $OA_1 = 1$.)
Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on définit le point A_{n+1} vérifiant

$$(\overrightarrow{A_n O}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad A_n A_{n+1} = OA_1$$

- ① Représenter sur une figure O, A_1, A_2, A_3, A_4 . Calculer OA_k pour $k = 1, 2, 3$ et 4 .
- ② Conjecturer l'expression de OA_n en fonction de n et prouver la conjecture.
- ③ On suppose construits les points A_1, \dots, A_5 . Expliquer comment construire à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas un segment de longueur $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (☛ idem avec $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$)

EXERCICE 2. Limites à calculer

Déterminer le sens de variation et la limite des suites définies pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ par :

$$\textcircled{1} u_n = 4 - \frac{1}{n^3} \quad \textcircled{2} v_n = 2n - n^2 \quad \textcircled{3} w_n = \frac{3n + 2}{2 + n}$$

EXERCICE 3. Suites et économie

Un particulier contracte un prêt de $d_0 = 200\,000\text{€}$ dans le cadre d'une opération immobilière.
Les modalités de remboursement sont les suivantes :

- ★ intérêts : à la fin de chaque année, la somme due au début de l'année augmente de 5%
- ★ remboursement : à la fin de chaque année, le particulier rembourse une somme de $r\text{€}$.

On note d_n la somme due (en euros) au bout de n années.

- ① Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 1,05d_n - r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (du moins tant qu'il reste quelque chose à rembourser).
- ② Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = d_n - 20r$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison. En déduire que $d_n = 1,05^n d_0 - 1,05^n \times 20r + 20r$.
- ③ Quel doit être le montant des annuités r (remboursements annuels, à 10^{-2} près) pour que le prêt soit remboursé au bout de 15 ans ? Combien cela représente-t-il par mois ? À combien se monteront les intérêts, au final ?