DEVOIR MAISON 14 POUR LE -22-03-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1.

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{1}{2}x^2$.

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée.

① Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

② Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

③ Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la courbe $(\mathcal{C})$ est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

① Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).

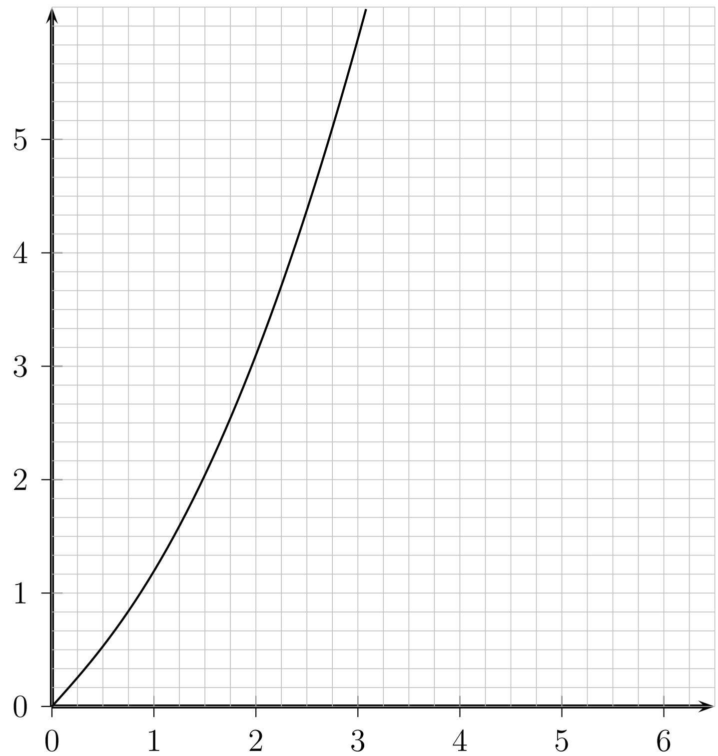
② À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

③ (a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

(d) En déduire la limite de la suite (u_n).



EXERCICE 2.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

① En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathcal{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

② (a) Interpréter graphiquement $g(2)$.

(b) Montrer que $0 \leqslant g\,(2) \leqslant 2{,}5$.

③ (a) Soit $x > 2$. Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

(b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

④ Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel t on a : $f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

① Soit $b \in \mathbb{R}$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = (-t+b)e^{-t}$.

Exprimer $h'(t)$ en fonction de b et t.

② En déduire, en fonction du réel x : $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

③ En déduire que pour tout réel x, $g\,(x) = x\,(1-\mathrm{e}^{-x})$.

④ Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Exercice 3.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

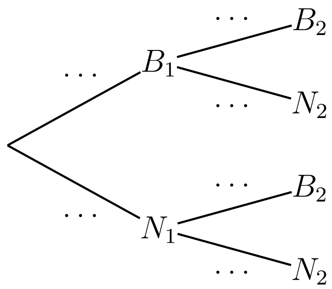
U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».

On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

① (a) Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.
Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

② Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

(a) Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.

(b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

(c) Calculer l'espérance mathématique de X.

(d) Le jeu est-il favorable au joueur ?

③ Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice 4.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, le point A a pour affixe i.

On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq \mathrm{i}$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z-\mathrm{i}}$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

① **Un exemple**

On considère le point K d'affixe $1+\mathrm{i}$.

(a) Placer le point K.

(b) Déterminer l'affixe du point K′ image de K par f.

(c) Placer le point K′.

② **Des points pour lesquels le problème ne se pose pas**

(a) On considère le point L d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$. Déterminer son image L′ par f.
Que remarque-t-on ?

(b) Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

③ **Un procédé de construction**

On nomme G le centre de gravité du triangle $\mathrm{A}MM'$, et g l'affixe de G (qui, on le rappelle, est la moyenne des affixes des sommets du triangle).

(a) Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3(z-\mathrm{i})}$.

(b) En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

(c) Démontrer que $\arg g = -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)$.

(d) Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
On nomme D′ l'image de D par f . Déduire des questions précédentes la construction du point D′ et la réaliser sur **la figure annexe à rendre avec la copie.**