Devoir maison 13 pour le -31-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Objectif : On souhaite démontrer le théorème dit de Napoléon[1]

Soit ABC un triangle direct[2] quelconque et A', B', C' tels que $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$ soient des triangles équilatéraux directs. On note A'', B'' et C'' les centres de gravités respectifs de ces trois triangles.

Le triangle $A''B''C''$ est alors équilatéral direct et de même centre de gravité que ABC.

Dans la suite, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1. Affixe du centre de gravité d'un triangle

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Soient $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
Soit G le point d'affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$.

① Exprimer les affixes de $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de a, b et c, et prouver $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

② En déduire que $G \in (AA')$. On admet que l'on peut montrer de même $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$.

③ Conclure que :
l'affixe du centre de gravité d'un triangle est la moyenne des affixes de ses sommets.

Exercice 2. Caractérisation des triangles équilatéraux

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$.

① On considère l'équation $z^3 = 1$. Montrer que z est solution si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = 0 \mod \frac{2\pi}{3}$.

② En déduire que cette équation admet trois solutions : $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et j^2.

③ Prouver : $j^3 - 1 = (j^2 + j + 1)(j - 1)$, puis $j^3 = 1$; $(j^2)^2 = j$; $j^2 + j + 1 = 0$; $j^2 = \bar{j}$

④ Montrer que : ABC est équilatéral direct $\iff b - c = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - c)$.

⑤ En déduire[3] : $\boxed{ABC \text{ équilatéral direct} \iff a + bj + cj^2 = 0}$

Exercice 3. Théorème de Napoléon

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Soient $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ tels que $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$ soient équilatéraux directs.
Soient $A''(a'')$, $B''(b'')$ et $C''(c'')$ les centres de gravités respectifs de ces trois triangles.

① Faire une figure.

② En utilisant l'équivalence de l'exercice 2, traduire les définitions de A', B' et C' par trois égalités de nombres complexes.

③ Calculer $a'' + jb'' + j^2c''$ et $a'' + b'' + c''$ puis conclure.

1. Ce théorème porte le nom de Napoléon Bonaparte (1769-1821), qui, en dépit de son goût pour les mathématiques, et de ses connaissances en la matière acquises lors de sa formation d'artilleur, n'en est sans doute pas l'auteur. . .
2. un triangle est *direct* lorsque une mesure de $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est dans $[0; \pi]$.
3. *indication :* multiplier l'égalité de la question précédente par j. . .