Devoir maison 11 -20-12-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Étude d'une équation

L'objectif est d'étudier l'équation $(*)$: $e^{\frac{x}{2}-1} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{e} = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\frac{x}{2}-1} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{e}$.

① À l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre et les valeurs des solutions de $(*)$.

② Calculer la limite de f en $-\infty$.

③ Montrer que pour $x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(e^{-1} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}-1}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

④ Montrer que f est dérivable et montrer que pour $x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}} - e}{2e}$.

⑤ Dresser le tableau de variations de f.

⑥ Valider par le calcul la conjecture concernant la solution de $(*)$ située dans l'intervalle $]-\infty; 2[$. Expliquer pourquoi il n'y a pas d'autre solution sur cet intervalle.

⑦ Démontrer que l'équation $(*)$ admet une solution unique sur l'intervalle $]2; +\infty[$. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de cette solution à 10^{-4} près.

⑧ Que dire de la conjecture de la question ① ?

Exercice 2. Étude d'une suite implicite

Les résultats démontrés ou admis à chaque question seront utiles pour la suite du problème.

On considère une famille de fonctions dépendant d'un paramètre entier n :

pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^2 + \cdots + x^n$.

① *Étude de f_n.* Soit un entier $n \geqslant 2$ fixé.

(a) Démontrer que pour tout $x \in [0\,;1[$, $f_n(x) = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$. En déduire $f_n(\frac{1}{2}) < 1$.

(b) Exprimer $f_n(1)$ en fonction de n.

(c) Montrer que f_n est dérivable et que pour $x \in [0\,;1]$: $f_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.

(d) Démontrer que f_n est strictement croissante.

(e) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique, notée u_n et qui vérifie $\dfrac{1}{2} < u_n < 1$.

② *Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.*

(a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $x \in [0\,;1]$ $f_{n+1}(x) = x(1 + f_n(x))$.

(b) Soit $n \geqslant 2$ entier. Déduire de la question précédente : $f_{n+1}(u_n) = 2u_n$.
Que vaut $f_{n+1}(u_{n+1})$? En déduire $f_{n+1}(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_n)$.

(c) En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.

(d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ.

③ *Limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.* Soit un entier $n \geqslant 2$.

(a) Calculer u_2. Démontrer que $0 \leqslant u_n^n \leqslant u_2^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$.

(b) Pourquoi a-t-on $\dfrac{u_n(1-u_n^n)}{1-u_n} = 1$? En déduire $\dfrac{\ell}{1-\ell} = 1$ puis la valeur de ℓ.