DEVOIR MAISON 10 POUR LE -21-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

Partie A

Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

① Étudier les variations de la fonction g.

② Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

③ En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$.

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.

On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

① Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

② Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

(a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

(b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

① Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

② Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

③ En déduire que la suite (u_n) est convergente. On admet que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ pour tout $a \in [0; 1]$. Déterminer la limite de (u_n).