Bac blanc du 3/4/13. Terminales S.
Durée 4h

L'usage d'une calculatrice est autorisé. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Les candidats concernés rédigeront leur exercice de spécialité sur une copie séparée.

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,12$.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

① Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?

② Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout réel positif t, $p(Y \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

① Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.

② Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?

③ Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?

④ On rappelle que $\mathbb{E}(Y) = \lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ où F est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que $x \mapsto -\left(\dfrac{1}{\lambda} + x\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une primitive de $x \mapsto \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}$. en déduire $F(t)$ en fonction de t

(b) Calculer $E(Y)$, puis interpréter le résultat et arrondir le résultat à 10^{-1} près.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples sans justification. Parmi les réponses proposées, une et une seule est correcte. Le candidat doit simplement indiquer le numéro de la réponse choisie sur sa copie. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte retire 0.5 point. Une absence de réponse ne rapporte rien et n'enlève rien. Un total global négatif sera ramené à 0.

① Soit X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 2$. Alors $\mathbb{P}(6 < X < 9) \approx$

Affirmation 1. a	0.243
Affirmation 1. b	0.286
Affirmation 1. c	9.9×10^{-10}
Affirmation 1. d	0.322

② Soit X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma > 0$. Alors, $\mathbb{P}(X > 8) =$

Affirmation 2. a	$0.5 - \mathbb{P}(8 < X < 10)$
Affirmation 2. b	$\mathbb{P}(8 < X < 10) - 0.5$
Affirmation 2. c	$0.5 + \mathbb{P}(8 < X < 10)$
Affirmation 2. d	$\mathbb{P}(X < -8)$

③ Soit X suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$.
Alors $\mathbb{P}(\mu - 1.5\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1.5\sigma)$ est égale, à 10^{-3} près, à :

Affirmation 3. a	0.825
Affirmation 3. b	0.613
Affirmation 3. c	1.960
Affirmation 3. d	0.866

④ Soit X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 8]$. Alors : $\mathbb{P}_{(X>3)}(X > 6) =$

Affirmation 4. a	$\dfrac{5}{32}$
Affirmation 4. b	$\dfrac{1}{4}$
Affirmation 4. c	$\dfrac{3}{4}$
Affirmation 4. d	$\dfrac{2}{5}$

⑤ On pose $I = \displaystyle\int_0^{\ln(9)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} dx$.

Affirmation 5. a	$I = \frac{2}{5}$
Affirmation 5. b	$I = -\frac{\ln(9)}{9+\ln(9)}$
Affirmation 5. c	$I = 4\ln(2)$
Affirmation 5. d	$I = \ln(5)$

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

① Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

② Montrer que $f(x) = x\left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

③ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

④ Étudier le sens de variation de la fonction f.
En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B

① Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.

② Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

③ Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 4 **5 points**

Uniquement pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A le point d'affixe i et par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}.$$

① Calculer l'affixe du point B′, image du point B d'affixe $2-\mathrm{i}$ par l'application f.
Placer les points B et B′ sur une figure que l'on fera sur la copie.

② Démontrer que l'application f n'admet pas de point invariant. On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.

③ (a) Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $\overline{z-\mathrm{i}} = \overline{z}+\mathrm{i}$.

(b) Démontrer que $\mathrm{O}M' = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(c) Démontrer que pour tout point M distinct de A,

$$\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + 2k\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

(d) En déduire une méthode de construction de l'image M' d'un point quelconque M distinct de A.

④ Soit (d) la droite passant par le point A et dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

(a) Dessiner la droite (d).

(b) Déterminer l'image par l'application f de la droite (d) privée du point A.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

① On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

(a) Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

(b) Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k,\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

② Démontrer que 227 est un nombre premier.

③ On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

– à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
– à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

(a) Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On utilisera le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p
alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

(b) Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ [modulo 227].

(c) En utilisant **1. b.**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A., on a $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?