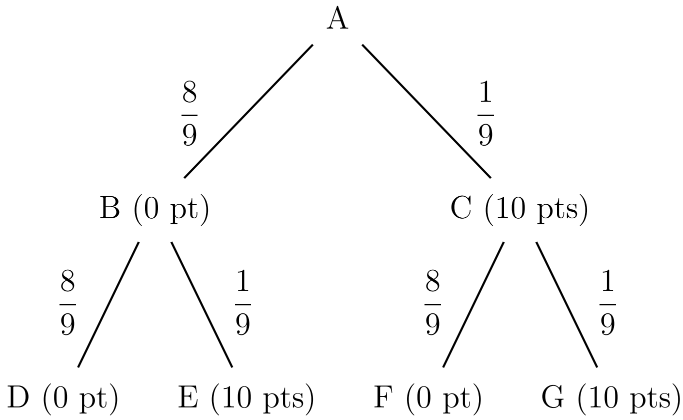
Mathématiques obligatoires -20-02-13-
Terminales S, 2012-2013, Lycée Newton

Exercice 1. reservé aux élèves qui **ne** suivent **pas** l'enseignement de spécialité 5 points

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

① Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer l'espérance de X.

(c) Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

② Le joueur effectue n parties et on suppose que ces parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

(a) On suppose que $n = 8$. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties.
On donnera le résultat arrondi au millième

(b) On suppose que n est un entier naturel non nul.
Montrer que la probabilité qu'il gagne au moins une partie est $p_n = 1 - (\frac{80}{81})^n$

(c) Écrire l'algorithme d'un programme qui calcule puis affiche le nombre n de parties à partir duquel la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure à 0,99.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ -20-02-13-
Terminales S, 2012-2013, Lycée Newton

EXERCICE 1. reservé aux élèves qui suivent l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

① Énoncer le théorème de Bézout.

② On considère l'équation à inconnues entières (E) : $71u + 17v = 1$.

(a) Justifier que l'équation (E) admet au moins un couple solution.

(b) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E).

(c) Démontrer que l'ensemble des couples de la forme $(6 - 17k; -25 + 71k), k \in \mathbb{Z}$, est solution de (E).

On admettra dans la suite que l'ensemble des couples solutions de (E) est

$$\{(6 - 17k; -25 + 71k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Partie B

① On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 71 & a \\ 17 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont des entiers, et on note Δ son déterminant.

(a) Après avoir remarqué que $\Delta \in \mathbb{Z}$, démontrer que A est inversible avec A^{-1} à coefficients entiers si et seulement si Δ divise le PGCD de 71 et 17.

(b) En déduire que A est inversible avec A^{-1} à coefficients entiers si et seulement si $(b; -a)$ ou $(-b; a)$ est solution de (E).

② On considère le système (S) : $\begin{cases} 71x + 25y &= 939 \\ 17x + 6y &= 225 \end{cases}$.

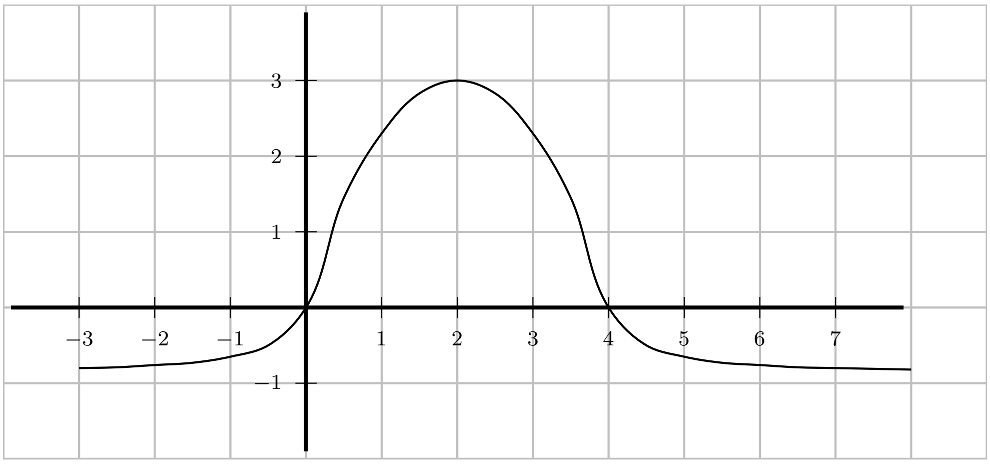
(a) Écrire le système (S) sous forme matricielle.

(b) Justifier que le système (S) admet une unique solution.

(c) Résoudre le système (S).

EXERCICE 2. Commun à tous 4 points

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3 ; 8]$.



On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

① (a) Que vaut $F(0)$?

(b) Donner le signe de $F(x)$:
$\star$ pour $x \in [0 ; 4]$;
$\star$ pour $x \in [-3 ; 0]$.
Justifier les réponses.

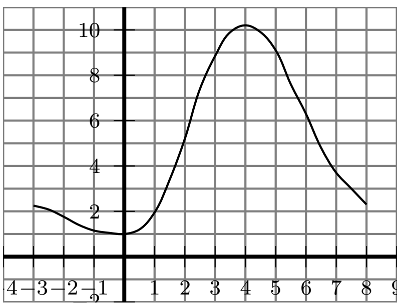
(c) Faire figurer sur le graphique donné en annexe les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

② (a) Que représente f pour F ?

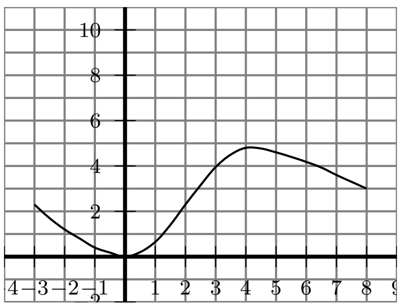
(b) Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f.

③ On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

Exercice 3. Commun à tous 5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

① On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2+2\text{i}$, $z_{\text{B}} = 2\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.
La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_{H} et z_{K} les affixes respectives des points H et K,

(a) Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

(b) Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

(c) Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_{\text{K}} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} \quad z_{\text{H}} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

② (a) Déterminer et placer les points images de B et C par f.

(b) On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image.
Déterminer les points invariants par f.

③ (a) Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$$\text{O}M \times \text{O}M' = 4.$$

(b) Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

④ Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.

(a) Calculer OK′ et OH′.

(b) Démontrer que $z_{\text{K}'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{\text{H}'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

(c) Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

EXERCICE 4. 6 points

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = (x-1)^2.$$

On note respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de f de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Les courbes sont tracées en annexe.

① (a) Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

(b) Donner les positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur $\mathbb{R}$.

② (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

(b) Soient a, b, c trois réels et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que, pour tout réel x, on a : $F'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c)e^{-x}$.

(c) Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de f. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(d) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

① (a) Démontrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}.$$

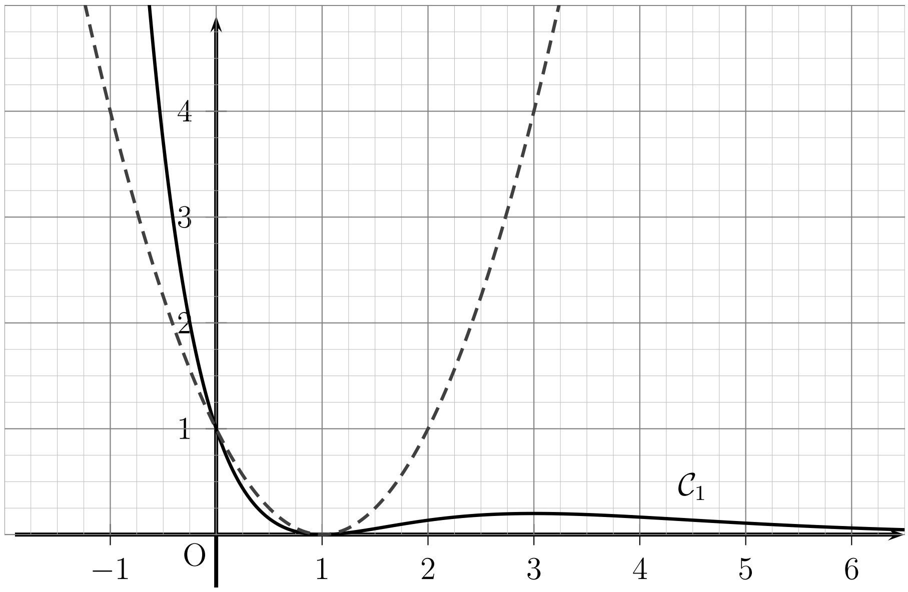
(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

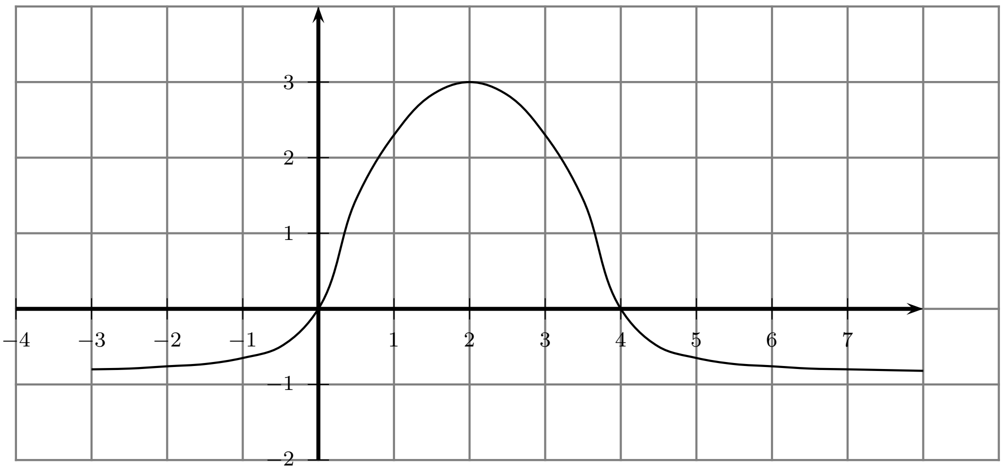
② En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Exercice 4 (rien à compléter)



Exercice 2 (à compléter)



Nom : ....