Contrôle 6 -06-02-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan $\mathcal{P}$ privé du point O dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + \mathrm{i} - \frac{1}{z}.$$

① On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \mathrm{i}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par F d'affixes respectives a' et b'.

(a) Calculer a' et représenter A et A′.

(b) Calculer b'.

(c) Montrer que B appartient à (Γ). Mettre B sous forme algébrique.
Représenter B à l'aide de (Γ) puis B′.

(d) Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

(e) En déduire la nature du triangle OBB′.

② On recherche l'ensemble (E) des points du plan $\mathcal{P}$ privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

(a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^2 + \mathrm{i}z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

(b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

(c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

③ Soit θ un réel.

(a) Démontrer que si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\mathrm{i}$.

(b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment [A′C] où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

(c) Justifier que si y est un réel tel que $-1 \leqslant y \leqslant 3$, il existe $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $y = 2\sin(\theta) + 1$. En déduire que l'image du cercle (Γ) par l'application F est le segment [A′C].