Contrôle 5 -17-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.On note $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et P le point de coordonnées $(3;2)$.
L'objectif du problème est de déterminer la distance de la courbe $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ au point P, c'est-à-dire la valeur minimale de PM lorsque M parcourt $\mathcal{C}_{\text{exp}}$.

① *Conjectures* [1.5 points]
On note A le point de la courbe $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ le plus proche de P. Représenter approximativement A, le segment $[AP]$ et la tangente à $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ en A. Émettre trois conjectures : (a) sur les coordonnées de A, (b) sur la distance de P à $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ à 0,1 près et (c) sur (AP) et la tangente en A à $\mathcal{C}_{\text{exp}}$.

② *Restitution organisée de connaissances.* [3 points]
En admettant que que la fonction exponentielle, noté exp,
$\star$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$,
$\star$ ne s'annule pas ($\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x),
prouver que $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour tous réels x et y.

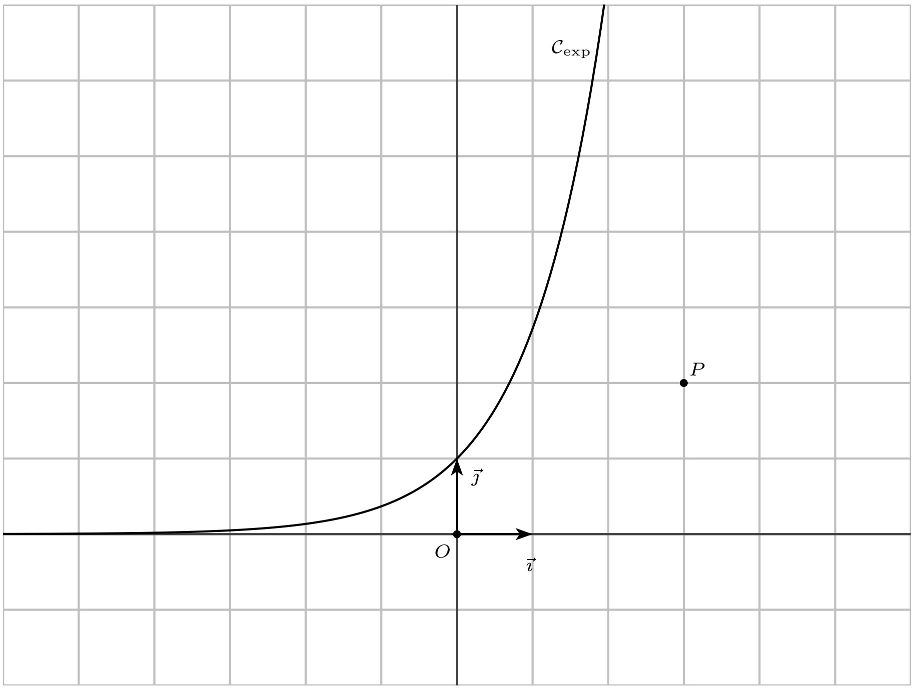
③ *Étude de l'équation (E) :* $x - 3 - 2e^x + e^{2x} = 0$ [8 points]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 3 - 2e^x + e^{2x}$.
(a) Montrer que pour tout x réel, $g(x) = x - 3 + e^x(e^x - 2)$.
(b) Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
(c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.
(d) Dresser le tableau de variations complet de g.
(e) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique a sur $\mathbb{R}$.
(f) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.
(g) Justifier le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

④ *Variations de la fonction auxiliaire* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 6x + 13 - 4e^x + e^{2x}$. [4 points]
(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 2\,g(x)$.
(b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
(c) (*bonus*) Montrer que $f(x) = e^{2x}(1 + 13e^{-2x} + (xe^{-x})^2 - 6xe^{-x}\,e^{-x} - 4e^{-x})$ pour tout réel x et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
(d) Déduire de la question ③ le tableau de variations complet de f. On donnera une valeur approchée à 0,01 près du minimum.

⑤ *Étude géométrique.* [4.5 points]
Soit x réel et $M(x; e^x) \in \mathcal{C}_{\text{exp}}$. Soit A le point de $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ d'abscisse a définie à la question ③e.
(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $PM = \sqrt{f(x)}$. Déduire de la question ④ que PM est minimale pour $M = A$. En déduire une approximation de la distance de P à $\mathcal{C}_{\text{exp}}$.
(b) Valider ou infirmer les conjectures (a) et (b) de la question ①.
(c) Donner, en fonction de a, l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ au point $A(a; e^a)$.
(d) Exprimer, en fonction de a, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{BA}$ où B est le point de la droite $\mathcal{T}$ d'abscisse $a - 1$.
(e) Montrer que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BA} = g(a)$ et valider la conjecture (c) de la question ①.

Annexe



NOM : ....

CONJECTURE (a) : les coordonnées de A sont : ....

CONJECTURE (b) : la distance de P à $\mathcal{C}_{\exp}$ est à 0,1 près : ....

CONJECTURE (c) : ....