Contrôle 4 -13-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Étude d'une courbe familière (6,5 points)

Soit $f : [0;4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{4x - x^2}$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et A le point de coordonnées $(2;0)$.

① Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 2$ comme axe de symétrie.

② Démontrer que f est dérivable sur $]0;4[$ et calculer sa dérivée sur cet intervalle.

③ Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

④ En utilisant la question ①, en déduire la dérivabilité de f en $x = 4$.

⑤ Dresser le tableau de variations complet de f.

⑥ Pour tout $x \in [0;4]$, soit $M(x;y) \in \mathcal{C}$. Exprimer son ordonnée y en fonction de x, puis calculer la distance AM. En déduire une description simple de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Une propriété des hyperboles (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole représentative de $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Dans cet exercice, a désigne un nombre réel strictement positif.

① Soit h tel que $a + h > 0$. Montrer que $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$.

② En déduire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$ et retrouver ainsi l'expression de $g'(a)$.

③ Déterminer, en fonction de a, l'équation de la tangente T à $\mathcal{H}$ au point M d'abscisse a.

④ Déterminer, en fonction de a, les coordonnées des points d'intersection respectifs A et B de la tangente T avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

⑤ Calculer l'aire de OAB et montrer qu'elle ne dépend pas de la position de l'abscisse a.

Exercice 3. Limites (4,5 points)

① (a) Montrer que pour $x \neq 0$, $1 \leqslant 3 + 2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 5$.

(b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3 + 2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

② (a) Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \sin(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer f'.

(b) En déduire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(2h)}{h}$.

③ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1} - 2x$

④ Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

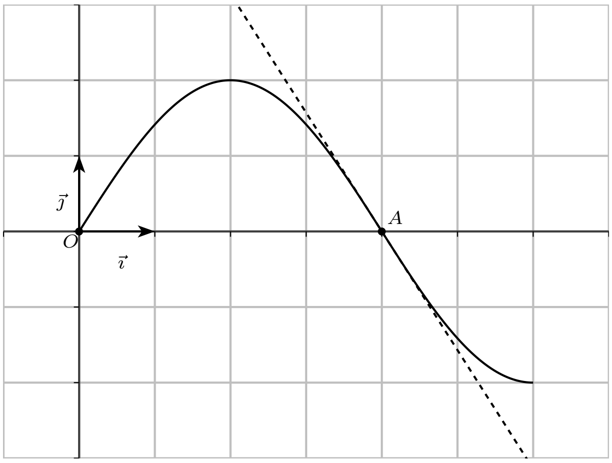
EXERCICE 4. Lecture graphique (5 points)

On a représenté (en traits pleins) la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[0; 6]$.

La tangente T (en pointillés) en $A(4; 0)$ à $\mathcal{C}$ passe également par $B(6; -3)$.

Elle a pour équation $y = ax + b$.

La courbe $\mathcal{C}$ possède deux tangentes horizontales.



① Donner, sans justifier, les réponses aux questions suivantes :

(a) Résoudre $f(x) = 3$

(b) Donner le minimum de f

(c) Donner le tableau de signes de $f(x) - ax - b$.

② On note f' la dérivée de f sur $[0; 6]$.

(a) Que vaut $f'(4)$? (justifier)

(b) Résoudre $f'(x) \geqslant 0$. Expliquer brièvement.

(c) Combien $f'(x) = 1$ a-t-elle de solution ? Expliquer brièvement.

③ Soit g une fonction paire définie sur $[-6; 6]$ telle que $g(x) = f(x)$ pour $x \in [0; 6]$.

(a) Donner le tableau de variations de g.

(b) Donner l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -4.

(c) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Expliquer en une phrase.

④ Une fonction F a pour dérivée f.

(a) Quelles sont les abscisses des points en lesquelles la courbe de F admet des tangentes horizontales ?

(b) Pour quelle(s) valeurs de x la fonction F est-elle maximale ? Expliquer.