

DEVOIR 2 : SUITES -18-10-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$ (10 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$ pour tout entier naturel non nul n .

- ① Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 .
- ② (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n > 0$.
 (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 (c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
 (d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n}$. En déduire que $\ell = \frac{1}{2}\ell$ puis la valeur de ℓ .
- ③ On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
 (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
 (b) En déduire que $u_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
- ④ Conclure à la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$.

EXERCICE 2. Étude d'une somme infinie (6 points)

On définit pour tout entier $n \geq 1$ la somme $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- ① Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
 (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 (b) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
 (c) En déduire la limite de (u_n) .
- ② Soit $n \geq 1$. Combien la somme s_n a-t-elle de termes? Quel est le plus petit d'entre eux?
- ③ En déduire que pour tout entier naturel non nul n , $s_n \geq \sqrt{n}$.
- ④ Déduire de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. Donner également le sens de variation de (s_n) .

EXERCICE 3. Datation au carbone 14 (4 points)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in]0; 1[$ et de premier terme $u_0 > 0$.

- ① Quel est le sens de variation de (u_n) ? Quelle est sa limite? Donner une expression de u_n en fonction de n .
- ② Quel est le résultat affiché par l'algorithme ci-contre pour un choix de $Q = 0,5$ et $P = 0,06$?
- ③ Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,999 88. Comment choisir Q et P pour que le programme affiche le rang du premier terme de la suite au moins inférieur de moitié au terme u_0 ? (on admettra que le résultat est 5 776)

```

Saisir Q,P
Affecter 1 à U
Affecter 0 à N
Tant que U > P :
    Affecter Q x U à U
    Affecter N + 1 à N
Fin Tant que
Afficher N
    
```

- ④ La quantité de carbone 14 présente dans un organisme baisse d'environ 0,012% chaque année. On note n le nombre d'années écoulées depuis la mort d'un organisme et u_n la quantité de carbone 14 restante n années après sa mort. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et déduire de ③ la période de demi-vie du carbone 14 (le nombre d'années après la mort d'un organisme à partir duquel la quantité de carbone 14 a diminué de moitié).
- ⑤ On a trouvé des ossements qui contiennent 6% de la quantité de carbone 14 contenue dans un être vivant. À partir de ② et ④, estimer l'âge des ossements à 3 000 ans près.