Mathématiques obligatoires -16-05-13-
Terminales S, 2012-2013, Lycée Newton

Exercice 1. reservé aux élèves qui **ne** suivent **pas** l'enseignement de spécialité 5 points

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*
On s'intéresse à la mise en bocal de carottes. L'étiquette indique une masse de 500 grammes.
On considère qu'un bocal est mal rempli s'il pèse moins de 485 grammes.

Partie A

La variable aléatoire X, qui à chaque bocal associe sa masse en grammes, suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 12.

① Calculer la probabilité qu'un bocal soit mal rempli.

② Calculer la probabilité $\mathbb{P}(491 \leqslant X \leqslant 518)$.

③ Déterminer h tel que $\mathbb{P}(500 - h \leqslant X \leqslant 500 + h) = 0{,}9$.

Partie B

Le service qualité est parvenu à ce que le pourcentage de bocaux mal remplis soit de 2%.
On teste un lot de 200 bocaux prélevés sur la production. (on considère qu'il s'agit de tirages avec remise indépendants). On note Y la variable aléatoire égale au nombre de bocaux mal remplis dans le lot.

① Quelle loi suit Y ?

② Donner l'espérance et l'écart-type de Y.

③ Calculer $\mathbb{P}(Y = 4)$.

Partie C

Les bocaux sont remplis sur deux chaînes de travail A et B.
La chaîne A fournit 80% des bocaux, la chaîne B le reste.
On sait que les bocaux produit par la chaîne A sont 1% à être mal remplis.
On note A l'événement « le bocal est produit par la chaîne A » et M l'événement « le bocal est mal rempli ».

① Représenter la situation par un arbre pondéré.

② On sait que $\mathbb{P}(M) = 0{,}02$. Quelle est la probabilité qu'un bocal fourni par B soit mal rempli ?

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ -16-05-13-
Terminales S, 2012-2013, Lycée Newton

EXERCICE 1. reservé aux élèves qui suivent l'enseignement de spécialité 5 points

Max va tous les jours au travail en empruntant le chemin A ou le chemin B. S'il y a des encombrements sur le trajet, il change d'itinéraire le lendemain.

La probabilité d'encombrement est égale à $\dfrac{1}{4}$ sur le trajet A et à $\dfrac{1}{2}$ sur le trajet B.

On introduit les matrices $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $P_n = \begin{pmatrix} p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$ où p_n est la probabilité que Max choisisse le trajet A le n-ième jour.

On suppose que le premier jour Max choisit A ou B avec équiprobabilité. On cherche à prévoir son choix de trajet dans un grand nombre de jours.

① Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.

② (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $P_{n+1} = P_n \times M$.

(b) Après avoir donné P_1, calculer la probabilité que Max choisisse le trajet A le deuxième jour.

(c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer P_n en fonction de M et de P_1.

③ On introduit les matrices suivantes $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $MV = \lambda V$ et $MW = \mu W$ où λ et μ sont deux réels à préciser.

(b) Avec $Q = [V\ W]$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, vérifier que Q est inversible puis que $Q \times D \times Q^{-1} = M$.

(c) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $M^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

(d) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.

④ On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\times 2^n} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 2^n} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3\times 2^n} & \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(a) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer sa limite .

(b) Que peut-on en conclure pour le choix de trajet de Max dans un grand nombre de jours ?

EXERCICE 2. 6 points

① Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

(a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

(b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

(c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

② On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Les courbes $\mathcal{C}$ et Γ sont données ci-dessous.

Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^x > \ln(x)$.

(a) En utilisant la question ①, montrer que

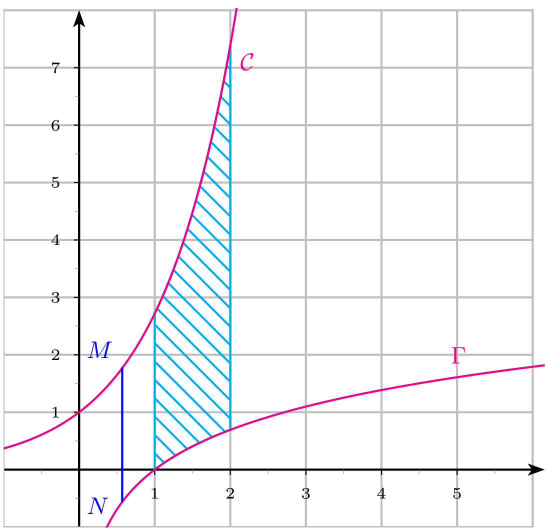
$$\mathrm{e}^\alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

En déduire que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

(b) Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

③ (a) Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure ci-dessous.



EXERCICE 3. 4 points

ABCDEFGH est le cube d'arête 1, représenté sur l'annexe ci-dessous qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

Partie A

① Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$.

② Déterminer un système d'équations paramétriques du plan (BDE).

③ En déduire qu'une équation du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

④ Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AG).

⑤ Montrer que l'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) est $I(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

⑥ Montrer que I est le projeté orthogonal de G sur le plan (BDE).

⑦ Calculer la distance GI.

⑧ Montrer que BDE est un triangle équilatérale et calculer sa surface.

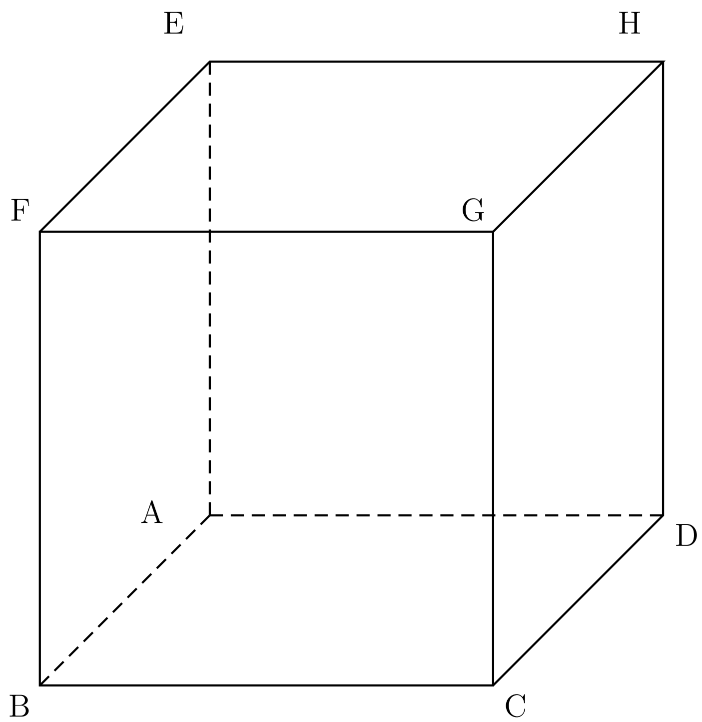
⑨ En déduire le volume du tétraèdre GBDE

Partie B. *À faire sur l'annexe ci-dessous*

Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle à (BDE) passant par le milieu de [BF].

① Représenter la section du cube suivant le plan (BDE).

② Représenter (dans une autre couleur) la section du cube suivant le plan $\mathcal{P}$.



Nom : ....

EXERCICE 4. 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

① Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, θ étant un nombre réel.

- (a) (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ et de rayon 1.
- (b) (E) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2\mathrm{i}$.
- (c) (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2\mathrm{i}$ et de rayon 1.
- (d) (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{5}$.

② Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1 + \mathrm{i}| = |z|$.
Soient les points A et B d' affixes respectives $1 - \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.

- (a) A est un point de (F).
- (b) (F) est la médiatrice du segment [OB].
- (c) (F) est la médiatrice du segment [AO].
- (d) (F) est le cercle de diamètre [BO].

③ On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 6 + 2\mathrm{i}$. Cette équation admet :

- (a) Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 2.
- (b) Une solution réelle.
- (c) Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 2.
- (d) Une solution qui a pour partie imaginaire 1.

④ Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}$.

- (a) f n'admet pas de point invariant.
- (b) Le point d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ est un antécédent du point d'affixe i.
- (c) Le point I d'affixe $1 + \mathrm{i}$ est invariant et $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
- (d) Le point J d'affixe $-1 - \mathrm{i}$ est invariant et $\left(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.