Contrôle commun -26-09-12-
Terminale S, 2012-2013, Lycée Newton

Exercice 1.

Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}}{x+2}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

① Montrer que $\mathcal{C}$ admet le point $I(-2; -4)$ comme centre de symétrie.

② Déterminer trois réels a, b, c tels que pour $x \neq -2$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

③ En déduire la position relative de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$ et de la courbe $\mathcal{C}$.

④ Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

⑤ Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.

⑥ Démontrer que pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 1}{2(x+2)^2}$.

⑦ En déduire le tableau de variations complet de f.

⑧ Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 à $\mathcal{C}$.

⑨ Représenter les points d'intersection avec les axes, la droite $\mathcal{D}$, les tangentes aux points d'abscisses 0 et -4 à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ elle-même sur le graphique au dos (à rendre avec la copie).

Exercice 2.

Soit g la fonction définie pour $x \in [-2\pi\,; 2\pi]$ par $g(x) = \sqrt{2}\,x + 2\,\sin(x)$.

① Démontrer que g est une fonction impaire.

② Justifier brièvement la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.

③ Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ puis le tableau de variations de g sur $[0\,; 2\pi]$.

④ Déduire des questions ① et ③ le tableau de variations de g sur l'intervalle $[-2\pi\,; 0]$

Exercice 3.

La suites (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La suite (S_n) est définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

① Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

② En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

③ Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
  (b) En déduire : $u_n = -\dfrac{3}{2^n} + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

④ (a) Déterminer le sens de variations de la suite (S_n).
  (b) *Cours.* Démontrer que pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
  (c) En déduire un expression de S_n en fonction de n.

⑤ *Dans cette question, toute trace de recherche, même partielle, sera évaluée.*
Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$.
Dire, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« les suites (x_n) et (s_n) ont le même sens de variation. »

Nom, classe ....

Exercice 1, question ⑨