Chapitre 8 : Nombres complexes -15-01-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

1. Définition et propriétés de calcul

Définition 1. Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ appelé ensemble des *nombres complexes* tel que :
- ⋆ L'ensemble des réels est contenu dans celui des complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- ⋆ $\mathbb{C}$ est muni d'une addition qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, avec les mêmes propriétés.
- ⋆ $\mathbb{C}$ est muni d'une multiplication qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, avec les mêmes propriétés.
- ⋆ $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- ⋆ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tel que $z = a + ib$.
  On appelle *forme algébrique* du nombre complexe z son écriture sous la forme $a + ib$.
- ⋆ Le nombre réel $\Re e(z) = a$ est la *partie réelle* de z
- ⋆ Le nombre réel $\Im m(z) = b$ est la *partie imaginaire* de z : ⚠ $\Im m(z) \in \mathbb{R}$.
- ⋆ Lorsque $\Re e(z) = 0$, on dit de z qu'il est *imaginaire pur*.

⚠ il est impossible de comparer deux nombres complexes ($z < z'$ n'a pas de sens)

Exemple 1. Simplifier : $(2 + i)(1 - i) =$ ....
$(1 + i)^2 =$ .... $i^{2012} =$ ....
$(3 - 2i)(3 + 2i) =$ ....
$\Re e(i - 1) =$ .... $\Im m(3 - 2i) =$ .... ⚠

Remarque 1. L'unicité de la forme algébrique signifie que $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$ où $a + ib$ et $a' + ib'$ sont les formes algébriques respectives de z et z'.

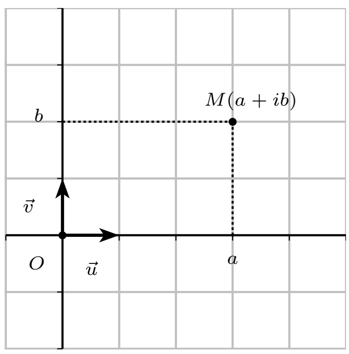
Exemple 2. Résoudre $z^2 + (2 - i)z - 2i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

....

....

2. Interprétation géométrique

Dans toute la suite du cours, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
(le terme *direct* signifie tel que $(\vec{u}; \vec{v}) = +\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$).



Définition 2.
- ⋆ L'*affixe* du point $M(a; b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$.
- ⋆ De même, l'affixe du vecteur $\vec{u}(x; y)$ est $z = x + iy$.
- ⋆ $A(z_A)$ signifie que A est le point du plan d'affixe $z_A \in \mathbb{C}$.
- ⋆ Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
- ⋆ Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$, l'affixe du milieu M de $[AB]$ est le nombre complexe $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.

⚠ Ne pas confondre A (point) et z_A (nombre complexe).

Exemple 3. Représenter les points $A(-i), B(2)$ et $D(1 + i)$. Affixe de M ? ....
Déterminer les affixes des milieux I de $[AM]$ et J de $[BD]$. Nature de $ABCD$?

....

....

3. Conjugué, nombres Complexes et équations

Définition 3. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. Le *conjugué* de z est $\bar{z} = a - ib$.

Propriété 1.

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

① $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in [0; +\infty[$ ② $\Re e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ③ $\Im m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ④ $\bar{\bar{z}} = z$

⑤ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ⑥ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ ⑦ $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$ avec $z' \neq 0$

Preuve. ① $z\bar{z} =$ ....

② $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) =$ ....

③ $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) =$ ....

④ $\bar{\bar{z}} =$ ....

⑤ $\overline{z + z'} =$ ....

⑥ $\overline{z \times z'} =$ ....

⑦ Pour $z \neq 0$, $\bar{z} \times \overline{1/z} = \overline{z \times 1/z} = 1$ donc $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$ d'où, avec ⑥, le dernier résultat. ☐

Méthode 1. Pour mettre un quotient $\frac{\omega}{z}$ sous forme algébrique, où $\omega, z \in \mathbb{C}$, (et $z \neq 0$), on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur : $\frac{\omega}{z} = \frac{\omega\bar{z}}{z\bar{z}}$
Cette méthode s'applique notamment lors de la résolution d'équations du premier degré à coefficients complexes.

Exemple 4. $\dfrac{2-i}{1+2i} =$ ....

Résoudre $(1-i)z = 1+i$ ....

Théorème 2.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $az^2 + bz + c$ admet :

⋆ deux racines réelles si $\Delta > 0$: $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

⋆ une racine réelle « double » si $\Delta = 0$: $z_0 = \frac{-b}{2a}$

⋆ deux racines complexes conjugées si $\Delta < 0$: $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Preuve. On met le trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ sous forme canonique, puis on factorise :
$P(z) = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + 2 \times \frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right)$.

⋆ si $\Delta > 0$, $P(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(z + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

⋆ si $\Delta = 0$: $P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$.

⋆ si $\Delta < 0$, $P(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(z + \frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$.

car $-\Delta > 0$ et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = i^2(-\Delta) = \Delta$. On conclue par la propriété du produit nul. ☐

Exemple 5. Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$..

....

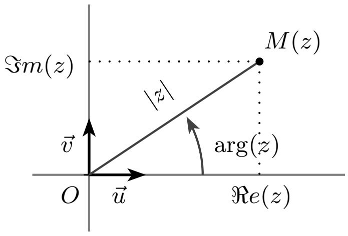
....

4. Module et argument d'un nombre complexe

> **Définition 4.** Le *module* de $z \in \mathbb{C}$ est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\Re e(z)^2 + \Im m(z)^2}$.
> Un *argument* de z est un réel $\arg(z)$ tel $\arg(z) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point d'affixe z.
> La *forme trigonométrique* de z est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \mod 2\pi$.

Remarque 2. On rappelle que les coordonnées polaires $[r;\theta]$ d'un point M de coordonnées cartésiennes $(x;y)$ sont définies par

$$r = \sqrt{x^2+y^2}; \quad x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta).$$



Les coordonnées polaires de $M(z)$ sont donc $[|z|; \arg(z)]$.
De même, $\vec{\omega}(z)$ vérifie $||\vec{\omega}|| = |z|$ et $(\vec{u};\vec{\omega}) = \arg(z) \mod 2\pi$.

Remarque 3. Par unicité des coordonnées polaires, si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec $r, \theta \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \mod 2\pi$.

Exemple 6. Forme algébrique de z de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$: $z =$....................
Forme trigo de $z = \sqrt{3} + i$: ....
....
....

Remarque 4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (au sens où $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$ le sont) et $f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = i(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Ainsi, $g(\theta) = f(\frac{\theta}{i})$ vérifie formellement $g' = g$ et $g(0) = 1$ donc par analogie on notera :

> **Définition 5.** $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
> La *forme exponentielle* de $z \in \mathbb{C}$ est $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \mod 2\pi$.
> Comme dans la remarque 3, si $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

Exemple 7. $e^{i\pi} + 1 =$ ....

Théorème 3.

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ (non nuls si nécessaire) et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

① $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	② $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$	③ $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$
④ $\lvert z/z'\rvert = \lvert z\rvert/\lvert z'\rvert$	⑤ $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \mod 2\pi$	⑥ $e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'}$
⑦ $\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	⑧ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \mod 2\pi$	⑨ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
⑩ $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	⑪ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \mod 2\pi$	⑫ $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

⑬ (Moivre) $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ ⑭ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

⑮ $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 \mod \pi$ ou $z = 0$

⑯ $z \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur) $\iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$ ou $z = 0$

Preuve. ① ② et ③ : on pose $r = |z|$, $r' = |z'|$, $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$ de sorte que :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i\sin\theta)r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'([\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')] + i[\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)]) \\ &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

par la remarque 3, on obtient : $|zz'| = rr' = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$.
Comme pour l'exponentielle, la relation ③ et l'unicité de la remarque 3 impliquent ④ à ⑭. □

5. Applications géométriques

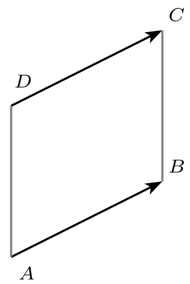
5.1. Affixes de vecteurs

Exemple 8. L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ (définition 2). Situations où cette formule intervient :

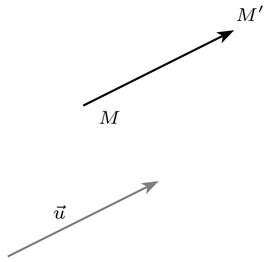
① $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

② M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

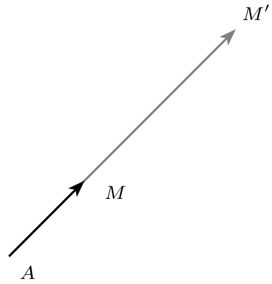
③ M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et rapport $r \iff \overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM}$.



① $z_B - z_A = z_C - z_D$.



② $z' - z = z_{\vec{u}}$



③ $z' - z_A = 3(z - z_A)$

Exemple 9. Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(-1+2i)$.

Exprimer z' en fonction de z : ....

5.2. Module, distance et cercles

Exemple 10. $|e^{i\theta}| =$ .... Forme exp. de z de module 1 ? ....

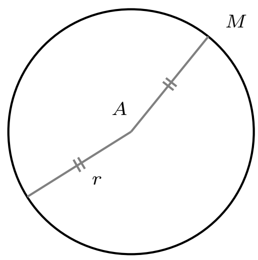
Propriété 4.

① Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Alors $AB = |z_B - z_A| = ||\overrightarrow{AB}||$.

② inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$.

③ $M(z)$ appartient au cercle de centre A et de rayon $r \iff z - z_A = re^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Preuve. ① vient de la déf. 2 (affixe de $\overrightarrow{AB}$) et de la req. 2 (la norme d'un vecteur est le module de son affixe). ③ : $M(z) \in \mathcal{C}(A, r) \iff AM = r \iff |z - z_A| = r \iff z - z_A = re^{i\theta}$. $\square$



① $|z - z_A| = r$

Exemple 11. situations où la formule ① intervient :

① $M \in$ cercle de centre A et de rayon $r \iff AM = r$

② $M \in$ médiatrice du segment $[AB] \iff AM = MB$.

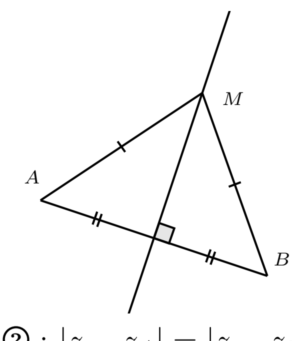
③ ABC isocèle en $A \iff AB = AC$;

④ ABC équilatéral $\iff AB = AC = BC$.

⑤ ABC rectangle en $A \iff BC^2 = AB^2 + AC^2$.

⑥ Le parallélogramme $ABCD$ est un losange $\iff AB = BC$.

⑦ Le rectangle $ABCD$ est un carré $\iff AB = BC$.



② : $|z - z_A| = |z - z_B|$

Exemple 12. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z telle que $z\bar{z} - 2\Re e(z) - 3 = 0$ est le cercle de centre $A(1)$ et de rayon 2.

....

....

5.3. Arguments et angles

Propriété 5.

Soient quatre points du plan $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ avec $A \neq B$.

① $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \mod 2\pi$.

② $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \mod 2\pi \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.

③ $(AB) \mathbin{//} (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ (donc A, B et C alignés $\iff \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$)

④ $(AB) \perp (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur).

Preuve. les derniers points viennent de ①; les égalités suivantes sont valables $\mod 2\pi$:

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \overset{⑤\ \text{th.3}}{=\!=} \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \overset{\text{rq.2}}{=\!=} (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB}; \vec{u})$$
$$= (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) \overset{\text{Chasles}}{=\!=\!=} (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \qquad \square$$

Exemple 13. Situations où la propriété 5 intervient :

① M appartient au cercle de diamètre $[AB] \iff (AM) \perp (MB)$

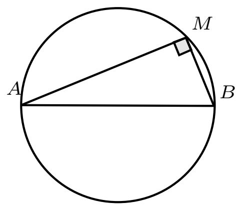
② un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle.

③ Un losange avec un angle droit est un carré.

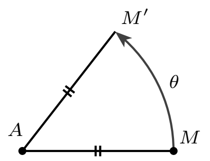
④ M' image de M par la rotation centrée en A d'angle $\theta \iff AM = AM'$; $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta$.

⑤ M appartient à la demi droite $[AB) \iff (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 0 \mod 2\pi$.

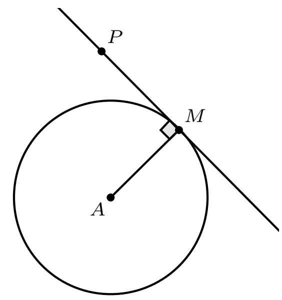
⑥ si M appartient à un cercle de centre A, le point P appartient à la tangente au cercle en M si et seulement si $(AM) \perp (MP)$.



① $\frac{z - z_A}{z - z_B} \in i\mathbb{R}$ ou $z = z_B$



④ $\frac{z' - z_A}{z - z_A} = e^{i\theta}$ ou $z = z_A$



⑥ $\frac{z_P - z}{z - z_A} \in i\mathbb{R}$

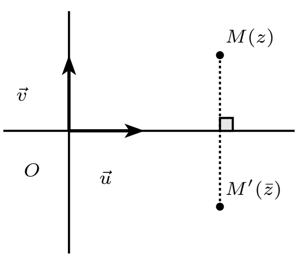
Exemple 14. Soient $A(1)$, $B(-1)$ et $C(i\sqrt{3})$. Forme exp. de $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ et nature de ABC ?

....

....

....

5.4. Autres propriétés



Remarque 5. Soient M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et M' le point d'affixe $\bar{z}$: M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque 6. L'affixe du *centre de gravité* d'un triangle est la moyenne des trois affixes des sommets. Plus généralement, l'*isobarycentre* d'un ensemble de points a pour affixe la moyenne des affixes des points. Le milieu et le centre de gravité en sont des exemples.

6. Applications trigonométriques

6.1. Formules de duplication

Remarque 7. la définition 5 de la forme exponentielle permet de retrouver facilement les formules de duplication.

Exemple 15. $e^{i(a+b)} =$ ....

$e^{ia}e^{ib} =$ ....

....

$\cos(a+b) =$ .... $\sin(a+b) =$ ....

Exemple 16. Soient $z = 1 + i$, $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z = z'/z$.

Forme exp. de z : ....

....

Forme algébrique de z' : ....

....

Forme algébrique de Z : ....

....

Forme exp de Z : ....

$\cos(\frac{\pi}{12}) =$ .... $\sin(\frac{\pi}{12}) =$ ....

6.2. Formule d'Euler

Propriété 6.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Preuve. on utilise la définition 5 de $e^{i\theta}$:

$\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} =$ ....

$\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} =$ .... □

Exemple 17. Linéariser $\sin^3(x)$ (écrire $\sin^3(x)$ comme combinaison de $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$) :

$\sin^3(x) =$ ....

....

....

....