Chapitre 6 : Fonction exponentielle -04-12-12-
Terminale S 1, 2012-2013, Y. Angeli

1. Définition et premières propriétés

Théorème 1.

Il existe une unique fonction exp, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Cette fonction est la *fonction exponentielle*. Plus tard, on notera $\exp(x) = e^x$.

Remarque 1. On a donc $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
L'existence est admise. (on a tracé la courbe de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler dans la feuille d'exercice 13). Pour démontrer le théorème on s'appuie sur :

Lemme 2. Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction $\exp(u)$ est dérivable sur I de dérivée $\exp(u)' = u' \exp(u)$.

Preuve. (du lemme 2) $\exp(u)$ est une fonction comopsée de la forme $v \circ u$ avec $v = \exp$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et u dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, $\exp(u)$ est dérivable sur I de dérivée : $\exp(u)' = u' \times v' \circ u = u' \times \exp(u)$. □

Lemme 3. ♥ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ donc $\exp(x) \neq 0$.

Preuve. (du lemme 3) Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x)\exp(-x)$.

La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après le lemme 2, $v : x \mapsto \exp(-x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par $v'(x) = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Comme produit de exp et v dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = \exp'(x)v(x) + v'(x)\exp(x) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(-x)\exp(x) = 0$, donc h est constante égale à $h(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$. D'où $h(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ donc $\exp(x) \neq 0$. □

Preuve. ♥ (de l'unicité dans le théorème 1) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$$

La fonction g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque exp ne s'annule pas (lemme 3).

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - \exp'(x)f(x)}{\exp(x)^2} = \frac{f(x)\exp(x) - \exp(x)f(x)}{\exp(x)^2} = 0$$

donc g est constante égale à $g(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = 1$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.
Ainsi, exp est la seule fonction à satisfaire $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. □

Définition 1. On définit le nombre e par $e = \exp(1) \approx 2{,}718$ (voir Feuille d'exercices 13).

Exemple 1. Soient ch (*cosinus hyperbolique*) et sh (*sinus hyperbolique*) définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$. Montrer $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

. . . .

. . . .

. . . .

2. Propriétés algébriques

Théorème 4.

♥ Pour tous x, y réels, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Preuve. on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.
On remarque que $f(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = f(x)$. Par unicité : $f(x) = \exp(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. □

Propriété 5.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$

Preuve. montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\exp(nx) = \exp(x)^n$

⋆ initialisation : $\exp(0) = 1 = \exp(x)^0$: la propriété est vraie au rang 0.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie au rang n : $\exp(nx) = \exp(x)^n$. On a :
$\exp(x)^{n+1} = \exp(x)^n \exp(x) \overset{\text{réc.}}{=\!=} \exp(nx)\exp(x) \overset{\text{thm 4}}{=\!=} \exp((n+1)x)$
donc la propriété est vraie au rang $n+1$

⋆ conclusion : la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

On l'étend à $n \in \mathbb{Z}$ en remarquant que $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{\exp(x)^n} = \exp(x)^{-n}$. □

Remarque 2. On a donc $e^n = \exp(1)^n = \exp(n)$. Par analogie, on note $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x, notation cohérente du fait que la fonction exponentielle possède les mêmes propriétés algébriques (transformation de la somme en produit) que les puissances.

Propriété 6.

Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

① $e^0 = 1$ ② $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ③ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

④ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ ⑤ $e^{nx} = (e^x)^n$ ⑥ $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$ ⑦ $e^x > 0$

Preuve. Le point ① vient de la définition. Le point ③ est le lemme 3, les points ② et ⑤ sont prouvées ci-dessus (théorème 4 et propriété 5).

Pour le point ④ on a : $\exp(x-y) \overset{②}{=\!=} \exp(x)\exp(-y) \overset{③}{=\!=} \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Pour les propriété ⑥ et ⑦, on remarque que $\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \exp x$. Comme un carré est positif et $\exp(x) \neq 0$, $\exp(x) > 0$. Ainsi, $\exp(x/2)$ est positif, c'est donc la racine carrée de $\exp(x)$. □

Exemple 2. Simplifier $\dfrac{(e^3)^8}{e^2 \times e^{-6}}$ ....

Pourquoi exp est-elle strictement croissante ? ....

Résoudre $e^{2-x} = 1$ ....

....

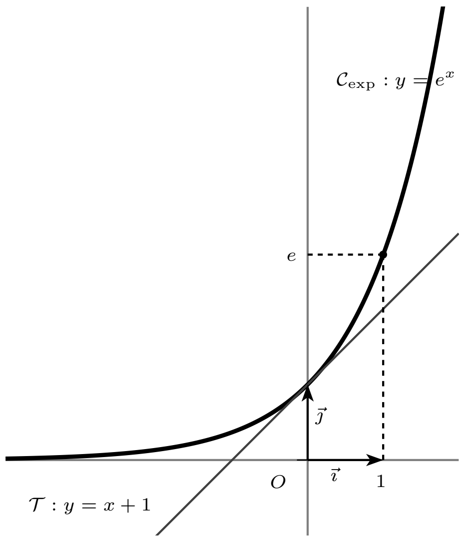
3. Étude de la fonction exponentielle

Théorème 7.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout x réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
exp		$\nearrow$	
	0		

① $e^0 = 1$ ② ♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ③ ♥ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$



Remarque 3. La tangente $\mathcal{T}$ au point $(0\,;1)$ à la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$ donc $y = x+1$, $\mathcal{T}$ est sous $\mathcal{C}_{\exp}$ sauf au point de contact $(0\,;1)$.

Preuve. Par définition, la fonction exponentielle est dérivable de dérivée $\exp' = \exp$.
Or, d'après le point ⑦ de la propriété 6, on a $\exp(x) > 0$ pour tout x.
La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
① est vrai par définition.
② ♥ on va montrer : $\exp(x) \geqslant x+1$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis utiliser le théorème de comparaison.
Étudions la foncton f définie par $f(x) = \exp(x) - (x+1)$. Cette fonction est dérivable de dérivée $f'(x) = \exp(x) - 1 = \exp(x) - \exp(0)$ pour tout réel x. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $f'(x) > 0 \iff x > 0$ et $f'(x) < 0 \iff x < 0$ donc : D'après le tableau de variations, le minimum de $f(x)$ est atteint en 0 et vaut 0. Ainsi, $\exp(x) \geqslant x+1$ pour $x \neq 0$. On a donc l'inégalité annoncée (et la position relative de la remarque 3).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, donc par le théorème de minoration : $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

③ ♥ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \overset{X=-x}{=\!=} \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} \overset{\text{pp.6,③}}{=\!=} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^X} \overset{\text{th.7,②}}{=\!=} 0.$ □

Exemple 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$. Tableau de variations complet ?

....

....

....

....

....

Remarque 4. Comme exp $\nearrow$, pour $a, b \in \mathbb{R}$: $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

Exemple 4. Résoudre $e^{3x} - e^{2x+1} > 0$ ....

....

Résoudre $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ ....

....

....

4. Croisssance comparée et limite remarquable

Théorème 8.

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ② $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$ (croissance comparée)

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ④ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ (croissance comparée)

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 0)

Preuve. ① pour $x > 0$: $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}}}{2 \times \frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \times \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \geqslant \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$. L'inégalité vient de la remarque 3 sur la position relative courbe tangente : $e^x \geqslant x + 1 > x$ donc pour $X > 0$, $\frac{e^X}{X} > 1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2} = +\infty$.
Par théorème de comparaison, on a bien : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. ② se démontre avec la même idée.
③ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X} = 0$ (inverse de la limite précédente). Idem pour ④.
⑤ Comme $\exp'(0) = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{0+h} - e^0}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. $\square$.

5. Hors programme : unicité par la relation fonctionnelle

Théorème 9.

La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et $f(x)f(y) = f(x+y)$ pour tous réels x, y.

Preuve. La fonction exponentielle vérifie l'équation fonctionnelle d'après le théorème 4, et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ par définition.

On fixe $y \in \mathbb{R}$. Si f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(x)f(y) = f(x+y)$, en dérivant par rapport à x on trouve : $f'(x)f(y) = f'(x+y)$ (le membre de droite est la composée de f dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction affine de coefficient directeur 1 : $x \mapsto x + y$). En choisissant $x = 0$, il vient $f'(0)f(y) = f'(y) \iff f(y) = f'(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = f'(0) = 1$: par unicité de la fonction exponentielle, $f = \exp$. $\square$.

6. Hors programme : équations différentielles

Définition 2. Une *équation différentielle* est une équation liant la variable x, une fonction inconnue y et ses dérivées successives $y', y'', ..., y^{(n)}$ sur un intervalle donnée.

Exemple 5. Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) : $y' = 0$ ....

Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) : $y' = y$ et $y(0) = 1$. ....

Propriété 10. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$ sont les $y : x \mapsto Ce^{ax}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

Preuve. On vérifie que $x \mapsto Ce^{ax}$ est solution. Pour prouver que ce sont les seules on dérive $x \mapsto y(x)e^{-ax}$ où y est solution. On trouve 0 donc $y(x)e^{-ax} = C$ d'où $y(x) = Ce^{ax}$.