Chapitre 5 : Dérivation -22-11-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

1. Nombre dérivé

1.1. Définition

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Le *taux d'accroissement* $\tau_{x_0,h}f$ de f entre $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$ est $\tau_{x_0,h}f = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Si la limite, lorsque h tend vers 0, du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}$ existe, la fonction f est dite *dérivable* en x_0. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé* $f'(x_0)$ de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Remarque 1. En physique, on notera souvent $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f est

$$\tau_{x,h}f = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \text{ donc } \lim_{h \to 0} \tau_{x,h} = 2x = f'(x)$$

Exemple 2. Montrer que $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R},\ \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

....

....

Exemple 3. Montrer que $g : [0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0. Calculer $g'(0)$.

....

....

1.2. Développement limité d'ordre 1

Propriété 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x \in I$. Il existe une fonction r et deux réels a et b tes que $\lim_{h \to 0} r(h) = 0$ et $f(x+h) = b + ha + hr(h)$ si et seulement si f est dérivable en x_0. On a alors $f(x_0) = b$ et $f'(x_0) = a$.

Preuve. Si une telle fonction $r(h)$ existe, on a $f(x_0) = b$ en faisant tendre h vers 0. Ainsi, $r(h) = \tau_{x_0,h} - a$. Comme la limite en 0 de $r(h)$ est nulle, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$. Réciproquement, si f est dérivable en x_0, la fonction définie par $r(h) = \tau_{x_0,h} - f'(x_0)$ possède les deux propriétés attendues.

Exemple 4. Soit $v : x \mapsto x^n$. Développer $v(x+h)$ à l'aide du binôme de Newton. Écrire $v(x+h)$ sous la forme $v(x+h) = v(x) + hb + hr(h)$ et en déduire $v'(x)$.

....

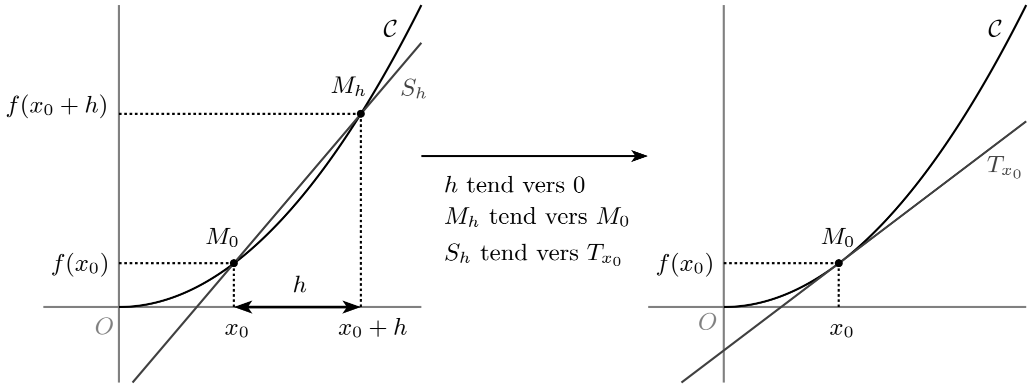
....

....

2. Interprétations

2.1. Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et M_h le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0 + h$. Le coefficient directeur de la sécante $S_h = (M_0M_h)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est le taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}f$. Lorsque h tend vers 0, la position limite de M_h est celle du point M et la position limite de la sécante S_h est la tangente T_{x_0} à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0. Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$, la limite des coefficients directeurs des sécantes.



Définition 2. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La *tangente* à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est le nombre $f'(x_0)$.

Exemple 5. Équation de la tangente à $\mathcal{P} : y = f(x)$ (où $f : x \mapsto x^2$) au point $A(1, 1)$?

. . . .

Remarque 2. Si la limite en x_0 du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}f$ est $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet en x_0 une tangente verticale d'équation $x = x_0$.

Exemple 6. Montrer que la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale à l'origine. . . .

. . . .

2.2. Interprétation cinétique

Soit $x(t)$ la position d'un mobile en mouvement rectiligne sur un axe gradué, en fonction du temps t. Le taux d'accroissement $\tau_{t_0,h}x$ représente la *vitesse moyenne* du mobile entre t_0 et $t_0 + h$, alors que $x'(t)$ est la *vitesse instantanée* du mobile au temps t.

2.3. Interprétation numérique

Propriété 2.

Lorsque h est voisin de 0, la tangente à une courbe est presque confondu avec cette courbe : si f est dérivable en x, on peut écrire pour h proche de 0 : $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$. (d'après la proposition 1).

Exemple 7. Soit $u : x \mapsto \frac{1}{x}$. Donner $u'(1)$, une approximation de $\frac{1}{1+h}$ puis de $\frac{1}{1{,}001}$ . . . .

. . . .

3. Calcul de fonctions dérivées

Définition 3. Lorsqu'une fonction f est dérivable en tout x d'un intervalle I, on appelle *fonction dérivée* et on note f' la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$

En pratique, pour calculer les fonctions dérivées, on calcule une fois pour toute les dérivées de fonctions usuelles (par le taux d'accroissement, voir tableau 5.1.), et on les utilise avec les règles de calcul du tableau 5.2.:

Exemple 8. Soit $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour $x \neq 0$, calculer $\tau_{x,h} f$ et en déduire $f'(x)$.

....

....

Exemple 9. Soit $g :]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$. Calculer $\tau_{x,h} f$ et en déduire $f'(x)$.

....

....

3.1. Opérations sur les dérivées

Théorème 3.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors

$\star$ $u + v$ est dérivable sur I de dérivée $(u + v)' = u' + v'$.

$\star$ uv est dérivable sur I de dérivée $(uv)' = u'v + v'u$.

$\star$ ku est dérivable sur I de dérivée $(ku)' = ku'$. (où $k \in \mathbb{R}$)

$\star$ $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x) = 0$, de dérivée $-\frac{v'}{v^2}$.

$\star$ $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x) = 0$, de dérivée $\frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Preuve. $\star$ Pour la somme, on calcule le taux d'accroissement de $(u + v)$:
$\tau_{x,h}(u + v) = \frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \tau_{x,h}u + \tau_{x,h}v$.
En faisant tendre h vers 0 on a bien : $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.
$\star$ Pour le produit, on procède de même :

$$\begin{aligned}
\tau_{x,h}(u \times v)(x) &= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times v(x+h) + u(x) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h}
\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0 on a bien : $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
$\star$ La dérivée de ku est un cas particulier de la situation précédente : $v(x) = k$ et $v'(x) = 0$.
$\star$ La dérivée de $\frac{1}{v}$ est un cas particulier de composition de fonctions.
$\star$ La dérivée de $\frac{u}{v}$ s'obtient par la formule de dérivée d'un produit appliquée à $u \times \frac{1}{v}$.

Exemple 10. Dérivabilité et dérivée de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \sin(x)$ ....

....

....

Exemple 11. Calculer la dérivee de $u : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \geqslant 1$ entier). En déduire que la deuxième formule des dérivées usuelles est en fait valable pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

3.2. Fonctions composées

Définition 4. Soit u une fonction définie sur I à valeurs dans J et v une fonction définie sur J à valeurs réelles. La *fonction composée* $v \circ u$ est définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$:

$$v \circ u : x \in I \xrightarrow{u} u(x) \in J \xrightarrow{v} v(u(x))$$

Théorème 4.

Soit deux fonctions dérivables $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$. La fonction $v \circ u$ est dérivable de dérivée : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ (donc $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

Preuve. On calcul le taux d'accroissement : pour h tel que $v(u(x+h)) - v(u(x)) \neq 0$:

$$\tau_{x,h} v \circ u = \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{h} = \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Or $\lim\limits_{x \to h} u(x+h) = u(x)$ donc par composition, en posant $X = u(x+h)$ et $X_0 = u(x)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{u(x+h) - u(x)} = \lim_{X \to X_0} \frac{v(X) - v(X_0)}{X - X_0} = v'(X_0) = v'(u(x))$$

et par produit : $\lim\limits_{h \to 0} \tau_{x,h} v \circ u = v'(u(x)) \times u'(x)$.

Exemple 12. Soit u est dérivable sur I. Dérivabilité et dérivée de u^n ?

....

....

Exemple 13. Soit u est dérivable sur I. Dérivabilité et dérivée de $\sin(u)$?

....

....

Exemple 14. Soit u est dérivable sur I et strictement positive. Dérivabilité , dérivée de $\sqrt{u}$?

....

....

Exemple 15. Dérivabilité et dérivée de $f :]-\infty; 3[,\ x \mapsto \sqrt{3-x}$. ....

....

....

....

Exemple 16. Dérivabilité et dérivée de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x^2)$. ....

....

....

....

4. Applications

4.1. Variations

Théorème 5.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;b[$.

- $f'(x) > 0$ sur $]a\,;b[$ (sauf en des points isolés[1]) $\iff$ f strictement croissante sur $]a\,;b[$.
- $f'(x) < 0$ sur $]a\,;b[$ (sauf en des points isolés) $\iff$ f strictement décroissante sur $]a\,;b[$.
- $f'(x) = 0$ sur $]a\,;b[$ si et seulement si f constante sur $]a\,;b[$.
- si f admet un maximum ou un minimum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- la réciproque est vrai seulement si f change de signe en x_0.

Preuve. (non rigoureuse, il s'agit seulement d'une idée) :
Si $f'(x) > 0$ sur I, cela signifie que toutes les tangentes à $\mathcal{C}_f$ sur I ont des coefficients directeurs strictement positifs, donc sont strictement croissantes. Au voisinage de $x \in I$, la courbe et sa tangente étant presques identiques (propriété 2), la fonction f est également strictement croissante au voisinage de chaque $x \in I$, donc sur l'intervalle I tout entier.

Exemple 17. Dresser le tableau de variations de $g : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x)$

....

....

....

....

4.2. Lecture graphique

$\mathcal{C}$ représente $f : [-3;5] \to \mathbb{R}$, Δ est tangente à $\mathcal{C}$ en $(2;0)$.

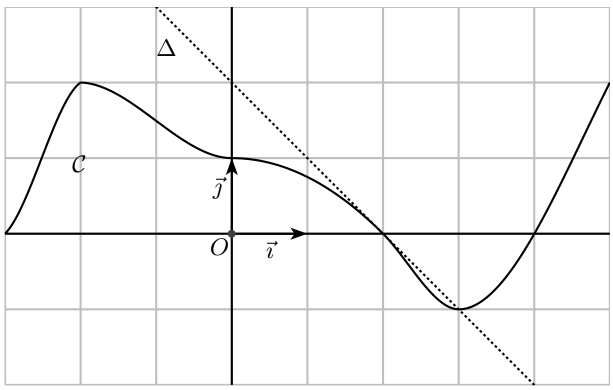
Calculer $f'(2)$. ....

....

Résoudre $f'(x) = 0$ ....

Résoudre $f'(x) \leqslant 0$ ....

....



4.3. Limites

Méthode 1. Les limites de taux d'accroissement que l'on a calculé permettent, en les réutilisant, de lever certaines formes indéterminées : lorsqu'on reconnaît le taux d'accroissement d'une fonction f dérivable en x_0, la limite en 0 de cet taux est $f'(x_0)$.

Exemple 18. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} =$ ....

....

....

1. c'est-à-dire : on n'a pas $f'(x) = 0$ sur un intervalle ouvert contenu dans $[a, b]$

5. Formulaire

5.1. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité	Condition
k	0	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R} : (n \geqslant 0);\ \mathbb{R} - \{0\} : (n < 0)$	$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	

5.2. Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors,

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité
$u+v$	$u'+v'$	I
uv	$u'v+v'u$	I
ku	ku'	I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-1}{u^2} \times u'$	tout $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
u^n	$nu^{n-1} \times u'$	I ; $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$	$x \in I$ tels que $u(x) > 0$
$\cos(u)$	$-\sin(u) \times u'$	I
$\sin(u)$	$\cos(u) \times u'$	I
$\ln(u)$	$\frac{1}{u} \times u'$	$x \in I$ tels que $u(x) > 0$
e^u	$e^u \times u'$	I