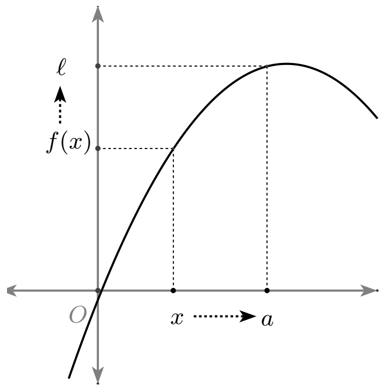
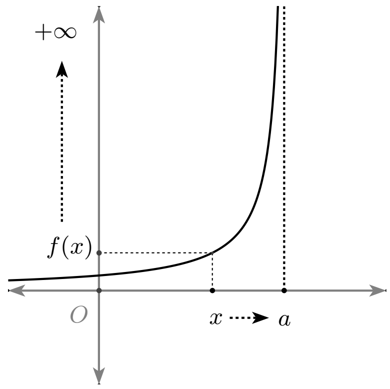
1. Notion de limite : les différentes situations.

Dans ces illustrations, a et ℓ désignent des nombres réels.

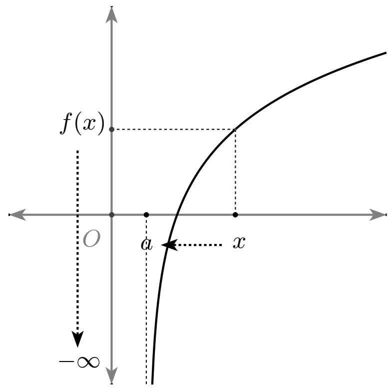
① $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$



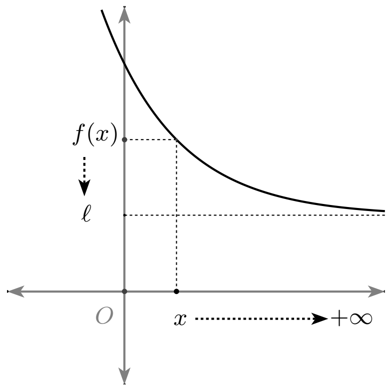
② $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



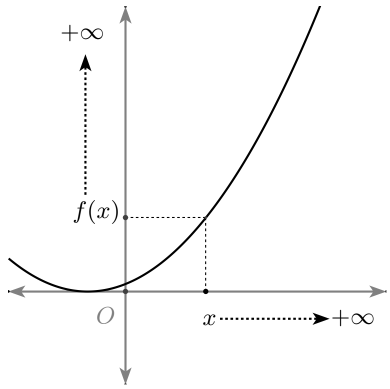
③ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



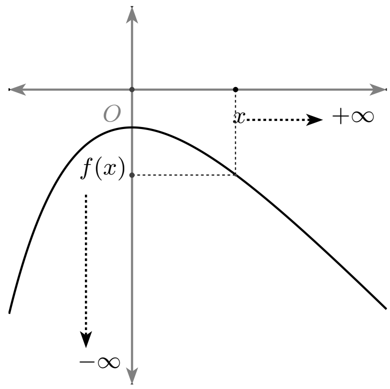
④ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



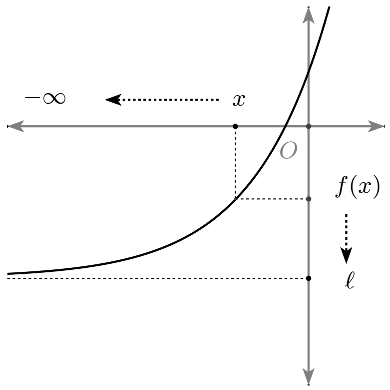
⑤ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



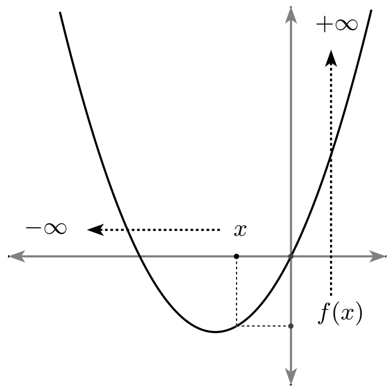
⑥ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



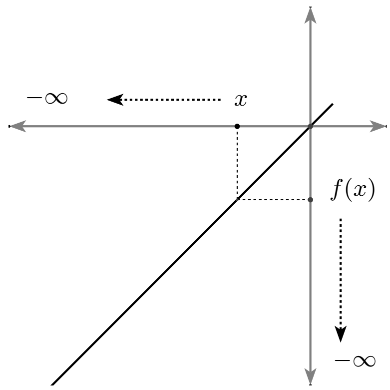
⑦ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$



⑧ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



⑨ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Notation 1. La notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ se lit : la *limite* de $f(x)$ lorsque x tend vers a est ℓ.

Les symboles ℓ et a désignent des nombres réels ou *moins l'infini* $(-\infty)$ ou *plus l'infini* $(+\infty)$

2. Définitions, limites de référence

Définition 1. On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$, est $\ell \in \mathbb{R}$ si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez proche de a. (voir ①)
• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \mid\ x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

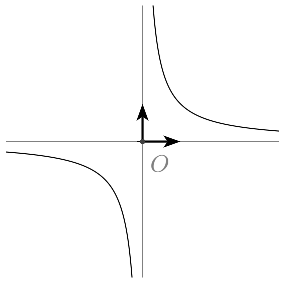
Exemple 1. On déduit de la définition que $\lim\limits_{x \to a} x = a$: il suffit de choisir $\delta =$..............

Remarque 1. La fonction f est *continue* en $a \in \mathcal{D}_f$ si pour tout $a \in \mathcal{D}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On verra que les fonctions de références et leurs combinaisons sont continues en tout point de leurs ensembles de définition. Pour une telle fonction, le calcul d'une limite en un point de l'ensemble de définition est un calcul d'image.
Application : $\lim\limits_{x \to \pi} x\cos(x) =$...

Définition 2. On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$, est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche du réel a (voir ②) :
• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \ \mid\ x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(x) \in]A, +\infty[$.
• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall A < 0,\ \exists \delta > 0 \ \mid\ x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(x) \in]-\infty; A[$. (voir ③)
Dans les cas précédent, on dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à la courbe de f. (ce qui correspond aux illustrations ② et ③).

Remarque 2. On peut considérer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a d'un seul côté :
On définit la *limite à droite* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a, x < a} f(x)$ en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a-\delta; a[$.
On définit la *limite à gauche* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a, x > a} f(x)$ en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a; a+\delta[$.

Exemple 2. Limites à gauche et à droite de zéro de la fonction inverse.



$\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{1}{x} =$...................... $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{1}{x} =$......................

Interpréter : ....
....

Définition 3. On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez grand. (voir ④)
• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ \mid\ x \in]B, +\infty[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0 \ \mid\ x \in]-\infty; B[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. (voir ⑦)
Lorsque la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est ℓ, on dit que la courbe de f admet la droite d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale en $+\infty$: ④ (ou $-\infty$: ⑦)

Exemple 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$......................... $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} =$.........................
Interpréter : ....

Définition 4. On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand (voir ⑤).
• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ \mid\ x \in]B, +\infty[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
On définit de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (⑥), $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (⑧) et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (⑨).

Exemple 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} = \sqrt{x} =$...... $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n =$...... $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n} =$...... $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n+1} =$......

3. Opérations sur les limites

Les résultats qui suivent sont valables pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Remarque 3. Les *formes indeterminées* : $\infty - \infty$; $\infty \times 0$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ échappent aux théorèmes suivants. Il faut alors changer l'écriture de la suite pour lever l'indetermination.

⚠ On n'écrit jamais de calcul faisant intervenir $+\infty$, $-\infty$, 0^+, 0^-, etc ...Il faut rédiger les calculs en décomposant chaque étape.

3.1. Théorèmes de limites de sommes

$\lim\limits_{x \to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} u(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} u(x) + v(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	⚠ ? ⚠

3.2. Théorèmes de limites de produits

$\lim\limits_{x \to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} u(x) \times v(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	⚠ ? ⚠

3.3. Théorèmes de limites de quotients

$\lim\limits_{x \to a} v(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $v(x) > 0$	0 avec $v(x) < 0$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Méthode 1. Pour traiter les limites de quotients $\dfrac{u}{v}$ on remarque $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$.

⚠ Si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$, il faut étudier le signe de $v(x)$ au voisnage de a pour obtenir $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{v(x)}$. ($+\infty$ si $v(x)$ strictement positif et $-\infty$ si $v(x)$ strictement négatif).

Exemple 5. • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ ....car $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$........................

• La limite $\lim\limits_{x \to 2, x < 2} \dfrac{1}{2 - x}$ dépend du signe de $2 - x$ car $\lim\limits_{x \to 2} 2 - x = 0$. Or :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$	0	$-$	

donc si $x < 2$, on a $2 - x > 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 2, x < 2} \dfrac{1}{2 - x} = +\infty$.

Exemple 6. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 2}{x^2}$ ....

....

....

....

Calculer $\lim\limits_{x \to 4, x < 1} \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ ....

....

....

....

....

3.4. Limite de fonctions composées

Définition 5. Soit u une fonction définie sur I à valeurs dans J et v une fonction définie sur J à valeurs réelles. La *fonction composée* $v \circ u$ est définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$:

$$v \circ u : x \in I \xrightarrow{u} u(x) \in J \xrightarrow{v} v(u(x))$$

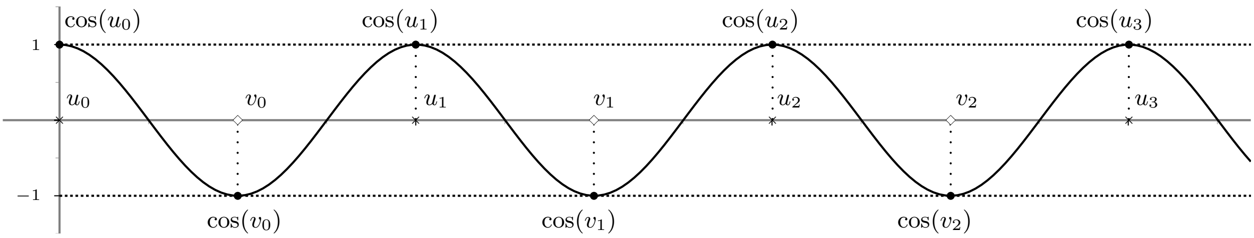
Exemple 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2x + \pi)$.
Écrire f comme la composée de deux fonctions simples u et v, calculer $u(\frac{\pi}{4})$ puis $f(\frac{\pi}{4})$ ......
....
....

Théorème 1.
Soient $a, A, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = A$ et $\lim\limits_{X\to A} v(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = \ell$.

Exemple 8. Écrire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ comme la composée de deux fonctions.
Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ....
....
....
....
$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) =$ ....
....
....
....

Méthode 2. *Absence de limite*
Pour prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers a lorsque n tend vers $+\infty$ mais telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Preuve. En raisonnant par l'absurde et en supposant que f admette une limite ℓ en a, le théorème 1 montre que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ tendent vers ℓ ce qui est absurde puisque ces deux suites ont des limites différentes. Ainsi, f n'a pas de limite en a. $\square$



Exemple 9. $\cos(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. En effet : soient (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \pi + 2\pi n$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2\pi n) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\pi + 2\pi n)$.
On montre de même que cosinus et sinus n'ont pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

4. Traiter les formes indéterminées

⚠ avant d'utiliser les méthodes suivantes, s'assurer d'avoir factorisé et **simplifié** l'expression.

Exemple 10. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} =$ ....

4.1. Formes indéterminées avec des polynômes

D'une manière générale, factoriser dans l'expression, ou au numérateur et au dénominateur, le terme qui semble devoir dominer :

Exemple 11. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^6 - x^4 + x^3 + 1 =$ ....

$\lim\limits_{x\to +\infty} 10\sqrt{x} - x + 2 =$ ....

Théorème 2.

La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

Preuve. Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :
$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{a_n}\dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_n}\dfrac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = \cdots = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, donc la limite du facteur entre parenthèses est 1. Par produit on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} a_n x^n$. $\square$

Exemple 12. $\lim\limits_{x\to +\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 =$ ....

Exemple 13. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3-x}{2x+1} \overset{\text{thm 2}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x}{2x} \overset{\text{simp.}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ par théorème.

Exemple 14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+x+1}$ ....

⚠ Le théorème du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.

⚠ L'utilisation du théorème pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :
1. Application du théorème 2. <u>Simplification</u> 3. Conclusion.

4.2. Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et changement de variable

Pour les limites en $a \in \mathbb{R}$ (ou a^+, a^-) qui présentent une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, il peut être opportun de faire un changement de variable en posant $x = a + h$.

Exemple 15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{1-x} =$ ....

4.3. Forme indéterminée et radicaux : quantité conjuguée

Pour les limites faisant intervenir des radicaux, on peut essayer de multiplier au numérateur et au dénominateur par *la quantité conjugée* avec comme idée d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

Exemple 16. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} =$ ....

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} =$ ....

5. Théorèmes de comparaison

Les deux théorèmes se prouvent à partir des définitions, comme leurs analogues pour les suites :

Théorème 3.

Soient u et f deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.
⋆ si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
⋆ si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 17. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\cos(x) - 2) =$ ....

Théorème 4.

Gendarmes. Soient u, v, et f trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque 4. il existe des théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$, vers a, a^+ ou a^-.

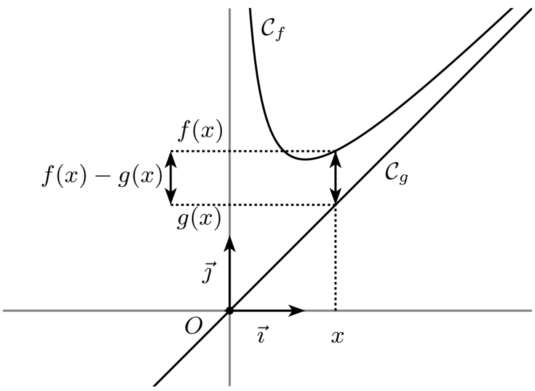
⚠ Les inégalités strictes ne passent pas aux limites.

Exemple 18. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$ ....
....
....

6. Interpréter la différence de deux fonctions

Soient f et g définies sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Remarque 5. Pour tout $x \in I$, $f(x) - g(x)$ représente, au signe près, l'écart entre le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.



Méthode 3. Ainsi, pour rechercher les points d'intersection de deux courbes, on résout l'équation $f(x) - g(x) = 0$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points appartenant aux deux courbes. On détermine leurs ordonnées en utilisant indifféremment $y = f(x)$ ou $y = g(x)$.

Méthode 4. De même, pour déterminer la position relative de deux courbes, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction des valeurs de x, et on l'interprète ainsi :
• sur les intervalles où $f(x) - g(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.
• sur les intervalles où $f(x) - g(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Exemple 19. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2 + \frac{1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymtptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.