CHAPITRE 3 : PROBABILITÉS FINIES -11-10-12-
Terminale S1 , 2012-2013, Y. Angeli

1. VOCABULAIRE

Définition 1. Une *une expérience aléatoire* est un processus dont le résultat est incertain.
On appelle *univers* d'une expérience aléatoire l'ensemble Ω des *issues* possibles de l'expérience (ou *évènements élémentaires*).
Dans ce chapitre, on supposera que l'univers est un ensemble fini.
Définir la *loi de probabilité* d'une expérience aléatoire dont l'univers est fini, c'est associer à chaque issue possible un nombre entre 0 et 1 (sa *probabilité*) qui représente les chances ou les risques que l'expérience aboutisse à ce résultat.
La somme des probabilités de chacune des issues possibles doit valoir 1.

Exemple 1. Lancer une pièce équilibrée est une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\text{pile,face}\}$.
La probabilité de l'évènement élémentaire « pile » est $\mathbb{P}(\text{pile}) = 0{,}5$ et de même, $\mathbb{P}(\text{face}) = 0{,}5$.
On a bien défini une loi de probabilité : $\mathbb{P}(\text{pile}) + \mathbb{P}(\text{face}) = 1$.

⚠ L'univers Ω n'est pas un nombre, mais un ensemble : dans l'exemple précédent, l'univers Ω est l'ensemble composé des 2 issues « pile » et « face ».

Définition 2. La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est dite *équirépartie* si chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Si l'univers Ω compte n issues possibles, la probabilité de chacune des issues est donc $\frac{1}{n}$.

Exemple 2. On considère l'expérience aléatoire consistant au lancer d'un dé équilibré.

Quelle indication signifie que la loi de probabilité est équirépartie ? ....

Lister les issues qui composent l'univers de l'expérience : $\Omega =$ ....

Décrire la loi de probabilité de cette expérience :

Issue						
Probabilité						

1.1. ÉVÈNEMENT

Définition 3. Étant donnée une expérience aléatoire, un *évènement* A est une partie de l'univers Ω : il est donc composé d'un certain nombre d'issues possibles de l'expérience.
La probabilité d'un évènement A est le nombre noté $\mathbb{P}(A)$ qui est la somme des probabilités de chacunes des issues qui composent l'évènement A. Ce nombre représente la chance ou le risque que l'évènement se produise.

Exemple 3. On reprend l'exemple 2 du dé. Soit A l'évènement « le résultat est strictement plus grand que 4 ». On note $A = \{5, 6\}$ et :
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Soit B l'évènement « le résultat est pair ». $B =$ ....

$\mathbb{P}(B) =$ ....

Remarque 1. Si la loi de probabilité est équirépartie : $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre total d'issues dans } \Omega}}$

2. Opérations sur les évènements

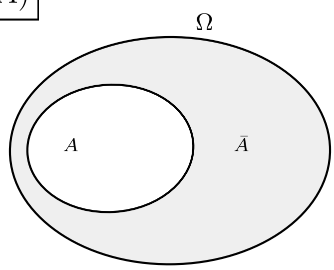
On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ deux évènements.

2.1. Évènement certain, évènement impossible

L'évènement *certain* Ω est composé de toutes les issues possibles : sa probabilité est $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
Il est certain que cet évènement se réalise.
L'évènement *impossible* $\varnothing$ ne contient aucune des issues possibles : sa probabilité est $\boxed{\mathbb{P}(\varnothing) = 0}$
Il est certain que cet évènement ne se réalise pas.

2.2. Évènement contraire

L'évènement *contraire* de l'évènement A est l'évènement $\bar{A}$ composé des toutes les issues de l'univers qui ne sont pas dans A. Sa probabilité est $\boxed{\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)}$



Exemple 4. Expérience 2 (dé) avec $A = \{5, 6\}$.
Décrire $\bar{B}$ par une liste, par une phrase, et donner sa probabilité.

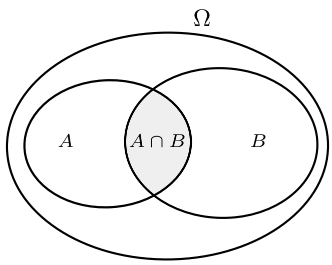
....

....

En général : $\bar{\varnothing} =$ .... $\bar{\bar{A}} =$ ....

2.3. Intersection d'évènements

L'*intersection* des évènements A et B est l'évènement noté $A \cap B$.
Cet évènement est réalisé lorsque A **et** B sont réalisés en même temps.
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, A et B sont dits *incompatibles* ou *disjoints*.



Exemple 5. Expérience 2 (dé), avec $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
Décrire $A \cap B$ par une liste, une phrase et donner sa probabilité.

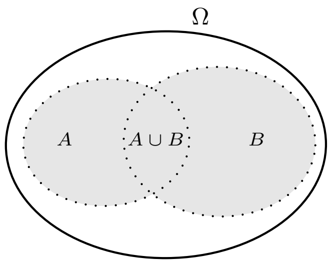
....

....

En général : $\bar{A} \cap A =$......... $A \cap \Omega =$......... $A \cap \varnothing =$.........

2.4. Union d'évènements

L'*union* des évènements A et B est l'évènement noté $A \cup B$, il est réalisé lorsque A **ou** B sont réalisés. (c'est-à-dire si A est réalisé ou B est réalisé ou A et B sont réalisés en même temps).
Une *partition* de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles A_1, ..., A_k tels que $A_1 \cup ... \cup A_k = \Omega$. (recouvrement sans superposition).
On a alors : $\boxed{\mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(A_k) = 1}$.



Exemple 6. Expérience 2 (dé), avec $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
Décrire $A \cup B$ par une liste, une phrase, et donner sa probabilité.

....

....

$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) =$ .... $A \cup \bar{A} =$ .... $\overline{A \cup B} =$ ....

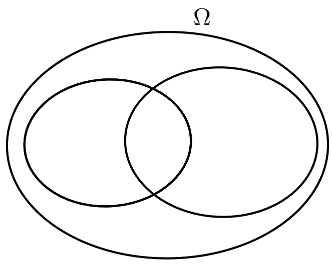
Propriété 1. $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$

Exemple 7. Trouver et illustrer une formule semblable pour $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

3. Un exemple

Sur 1 000 ordinateurs vendus, un marchand observe que 80 ont exigé une réparation dans la deuxième année qui a suivi l'achat (évènement noté R_2) et 125 lors de la troisième année qui a suivi l'achat (R_3), dont 20 avaient déjà été réparés lors de la deuxième année.

	R_2	$\bar{R}_2$	Total
R_3			
$\bar{R}_3$			
Total			1 000



On considère l'expérience aléatoire « acheter un ordinateur à ce marchand » dont l'univers Ω est l'ensemble des 1000 ordinateurs. Compléter :

$R_2 \cap R_3$	« l'ordinateur à été réparé la seconde et la troisième année »	$\mathbb{P}(R_2 \cap R_3) =$
$\bar{R}_2$	....	$\mathbb{P}(\bar{R}_2) =$
$\bar{R}_2 \cap R_3$	....	$\mathbb{P}(\bar{R}_2 \cap R_3) =$
...	« l'ordinateur a subi au moins une réparation »	......
...	« l'ordinateur n'a subi aucune réparation »	......
...	« l'ordinateur a subi une seule réparation »	......

Sachant que l'ordinateur a été réparé la seconde année, quelle est la probabiltié qu'il le soit aussi la troisième ? (décrire l'univers !) Exprimer ce résultat à l'aide de $\mathbb{P}(R_2)$ et $\mathbb{P}(R_2 \cap R_3)$.

....

4. Variable aléatoire

Définition 4. Définir une *variable aléatoire* X, c'est associer un nombre réel à chacune des issues de Ω. L'évènement « $X = k$ » est l'ensemble des issues pour lesquelles X vaut k.
La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X associe à chaque valeur possible k de la variable X la probabilité de l'évènement « $X = k$ ».
L'*espérance* de cette variable aléatoire est le nombre $\mathbb{E}(X) = \sum k \times \mathbb{P}(X = k)$.
La *variance* de cette loi est le nombre $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \sum (k - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = k)$.
L'*écart-type* est le nombre $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)}$.

Remarque 2. L'espérance est une moyenne. Dans le cas d'un jeu, c'est un gain moyen (ou une perte moyenne, si elle est négative). Un jeu est *équilibré* si l'espérance (de gain) est nulle.

Exemple 8. ♥ Prouver : $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$: ....
et $\mathbb{V}\text{ar}(aX + b) = a^2\mathbb{V}\text{ar}(X)$ ....

Exemple 9. Dans l'exemple précédent : la réparation d'un ordinateur la seconde année coûte en moyenne 250€ et la réparation la troisième année coûte 350€ en moyenne. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque ordinateur le coût moyen de ses réparations éventuelles. Quelles valeurs peut prendre X ? Présenter sa loi de probabilité sous forme d'un tableau, calculer son espérance. À quel prix le marchand doit-il fixer l'extension de garantie de un à trois ans pour espérer dégager un bénéfice de 10€ par extension vendue ?

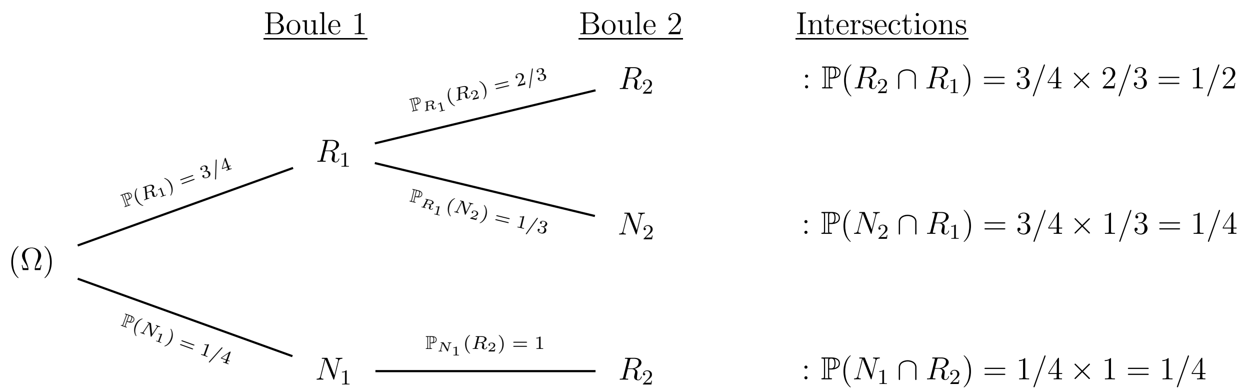
5. Probabilités conditonnelles

Définition 5. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on appelle *probabilité conditionnelle* de B sachant A le nombre noté $\mathbb{P}_A(B)$, ou parfois $\mathbb{P}(B|A)$, et défini par $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.
Ce nombre représente la probabilité de l'évènement $A \cap B$ dans l'univers A.

Arbre de choix. on modélise une situation faisant intervenir les probabilités conditionnelles par un *arbre*, se lisant de gauche à droite et constitué de *nœuds* et de *branches* :

- ⋆ Chaque nœud représente un évènement (le premier, souvent omis, représente l'univers).
- ⋆ Les branches issues d'un même nœud aboutissent à des évènements formant une partition.
- ⋆ Près de la branche partant du premier nœud et aboutissant à B figure $\mathbb{P}(B)$.
- ⋆ Près de la branche partant de A et aboutissant à B figure la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$.

Exemple 10. On tire deux boules de suite *sans remise* dans un sac contenant 4 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, et un boule noire. On note R_1 l'évènement « la première boule est rouge », N_1 l'évènement « la première boule est noire ». Les évènements R_1 et N_1 forment une partition. (ces deux situations ne peuvent survenir en même temps et couvrent toutes les possibilités). On définit de même R_2 et N_2.



Théorème 2.

• **Loi des nœuds :** La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1 : si $B_1 \dots B_n$ est une partition et $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors : $\mathbb{P}_A(B_1) + \cdots + \mathbb{P}_A(B_n) = 1$
• **Intersections et arbres :** Si un chemin parcouru sur l'arbre (de gauche à droite) passe par les évènements $B_1 \dots B_n$, alors $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$ est le produit des probabilités associées à chacune des branches parcourues.
• **Formule des probabilités totales.** Si $B_1, \dots, B_n$ forment une partition, la probabilité d'un évènement A est $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap B_n)$.
Si aucun des B_i n'est vide : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(A) + \mathbb{P}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2}(A) + \cdots + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}\mathbb{P}(A)$

Preuve. La loi des nœuds comme la formule des probabilités totales sont des conséquences du fait que $A \cap B_1 \dots A \cap B_n$ est une partition de A, la formule d'intersection vient de la définition 5 : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$. □

Exemple 11. Dans l'exemple 10, la loi des nœuds est bien vérifiée :
• $\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(N_1) = 3/4 + 1/4 = 1$ • $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) + \mathbb{P}_{R_1}(N_2) = 2/3 + 1/3 = 1$ • $\mathbb{P}_{N_1}(R_2) = 1$
D'après la formule des probabilités totales :
• $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = 1/2 + 1/4 = 3/4$.
Ainsi : $\mathbb{P}_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3$. (on peut « retourner » l'arbre)

6. Évènements indépendants

> **Définition 6.** Deux évènements A et B sont *indépendants* si et seulement si on a l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Remarque 3. Si $A, B \neq \varnothing$ sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ donc $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$: que A soit réalisé n'influe pas sur la probabilité que B a de se réaliser.

⚠ Cette formule n'est utilisable que si l'on sait que A et B sont indépendants. Réciproquement, pour prouver l'indépendance de A et B, il faut calculer chacun des membres et vérifier l'égalité.

Exemple 12. Dans l'exemple 10, dire si R_1 et R_2 sont indépendants :

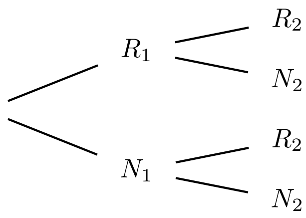
$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) & = & \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) & = & \dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 13. Dans l'exemple 10, pour un tirage *avec remise* :

$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\mathbb{P}(R_2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ Indépendance de R_1 et R_2 ?

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) & = & \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) & = & \dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$



Exemple 14. Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi. ♥

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

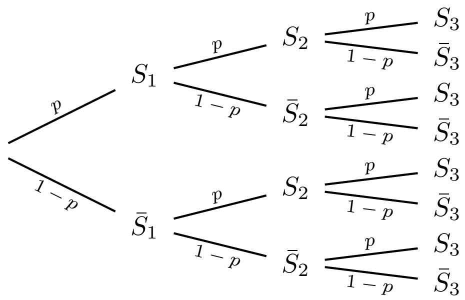
7. Loi de Bernoulli, loi binomiale

> **Définition 7.** Une expérience aléatoire suit une loi de *de Bernoulli* si elle n'a que deux issues possibles S (succès) et $\bar{S}$ (échec). Il suffit alors de la donnée de $p \in [0;1]$ tel que $\mathbb{P}(S) = p$ et $\mathbb{P}(\bar{S}) = 1 - p$ pour définir la loi de probabilité de l'expérience.

Exemple 15. On considère le lancer d'un dé équilibré et on note S l'évènement : « obtenir 6 ». Donner la loi de probabilité de cette expérience : $\mathbb{P}(S) = \dots\dots$ $\mathbb{P}(\bar{S}) = \dots\dots$

> **Définition 8.** Un *schéma de Bernoulli* de paramètre n et p est une expérience consistant en la répétition indépendante de n expériences de Bernoulli identiques de probabilité de succès p. Une variable aléatoire X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p (on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) si elle dénombre les succès d'un schéma de Bernoulli.

Exemple 16. Schéma de Bernoulli de paramètres $(3, p)$.
Soit X la variable aléatoire qui dénombre les succès d'une telle expérience : $X \sim \mathcal{B}(3, p)$.
$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) = \mathbb{P}(S_1) \times P(S_2) \times P(\bar{S}_3) = p^2(1-p)$.
De même, $\mathbb{P}(S_1 \cap \bar{S}_2 \cap S_3) = P(\bar{S}_1 \cap S_2 \cap S_3) = p^2(1-p)$.
3 chemins de probabilités égales décrivent « $X = 2$ » : $\mathbb{P}(X = 2) = 3 \times p^2(1-p)$. (probas totales)



Exemple 17. On lance trois dés. Probabilité d'obtenir trois 6 ? $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 exactement deux fois ? $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Au moins deux fois ? $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Quelle est la probabilité d'obtenir n fois 6 sur n lancés de dés ? $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

8. Combinaisons

Définition 9. Soient deux entiers $0 \leqslant k \leqslant n$. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de possibilités de choisir k objets parmi n. Le nombre $\binom{n}{k}$ est en particulier le nombre de chemins menant à exactement k succès sur l'arbre associé à un schéma de Bernouilli de paramètres (n, p).

Théorème 3.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Et : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}\text{ar}(X) = np(1-p)$

Preuve. Par indépendance des différentes expériences,
$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k \cap \bar{S}_{k+1} \cap \cdots \cap \bar{S}_n) = \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}(S_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{P}(\bar{S}_{k+1}) \times \ldots \mathbb{P}(\bar{S}_n)$.
Les expériences étant identiques, $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k \cap \bar{S}_{k+1} \cap \cdots \cap \bar{S}_n) = p^k(1-p)^{n-k}$.
De même, les $\binom{n}{k}$ évènements composés de k succès et $n-k$ échecs ont pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$. Par la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Exemple 18. Probabilité d'obtenir exactement 2 six sur 12 dés ? ....

Théorème 4.

Formule de Pascal. Si $0 \leqslant k < n$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. ♥

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	**2**	**1**				
3	1	3	**3**	1			
4							
5							
6							

Preuve. Pour choisir $k+1$ objets parmi $n+1$, ou bien on choisit le premier et k objets parmi les n restant, ou bien on ne choisit pas le premier et on en choisit $k+1$ parmi les n restants. □

Exemple 19. $\binom{n}{1} = \ldots\ldots$ Expliquer : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ....

Théorème 5.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on a : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Preuve. Lorsqu'on développe le produit de n facteurs $(a+b)^n$, le coefficient de $a^k b^{n-k}$ est le nombre de façons de choisir k facteurs a parmi les n facteurs $(a+b)^n$. □

Exemple 20. Développer : $(1+x)^4 =$ ....
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$ ....

Remarque 4. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. À la calculatrice, $\binom{4}{2}$ s'obtient en tapant $\boxed{4}$+$\boxed{\text{Combinaison}}$+$\boxed{2}$ où « combinaison » est l'option 3 du menu `Math`, sous menu `PRB`.

Exemple 21. *Loi géométrique tronquée.*
Lors d'un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire Y qui vaut 0 sans succès, et le rang du premier succès sinon, suit une loi géométrique tronquée. Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$, $\mathbb{E}(Y)$.

....

....

....

....