Suites numériques -18-09-12-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

1. Définition, raisonnement par récurrence

Définition 1. Une *suite numérique* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'image de n par la suite u se note $u(n) = u_n$, on l'appelle le *terme* de *rang* n de la suite u_n (ou d'*indice* n).

Remarque 1. On note traditionnellement la variable d'une suite n (ou m, p, q) et on réserve le x ou le t pour les variables de fonctions définies sur des intervalles.
• La suite est notée entre parenthèses $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un terme de la suite, sans parenthèse : u_n. (même distinction qu'entre les notations f et $f(x)$).
• Une suite peut être définie à partir d'un entier n_0 plutôt que sur $\mathbb{N}$, les énoncés du cours peuvent être adaptés pour de telles suites (remplacer $n \in \mathbb{N}$ par $n \geqslant n_0$).
⚠ une suite ne peut pas être dérivée : pour être dérivable en x, une fonction doit être définie sur un intervalle qui contient x.

Exemple 1. *Suites explicites*
Une suite (u_n) est *explicite* si elle est définie par une fonction f et la relation $u_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}$.
• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n^2$.

$u_0 = \dots\dots\dots$ $u_1 = \dots\dots\dots$ $u_2 \dots\dots\dots\dots$ $u_n + 1 = \dots\dots$ $u_{n+1} = \dots\dots\dots$

• Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n$.

$v_0 = \dots\dots\dots$ $v_1 = \dots\dots\dots$ $v_2 \dots\dots\dots\dots$ $v_{2n} = \dots\dots\dots$ $v_{2n+1} = \dots\dots\dots$

Exemple 2. *Suites définies par récurrence*
Une suite est définie par *récurrence* lorsqu'on en donne un ou plusieurs termes initaux et une relation qui permet de définir un terme en fonction du ou des termes précédents :
• Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} = w_n - 2$.

$w_1 = \dots\dots\dots$ $w_2 = \dots\dots\dots$ $w_3 \dots\dots\dots\dots$ $w_4 = \dots\dots\dots$ $w_n = \dots\dots\dots$

Propriété 1.

Raisonnement par récurrence. Une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si :
⋆ initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
⋆ transmission : si pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ($\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$)

Exemple 3. Montrons par récurrence que si une suite vérifie $u_{n+1} = r + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n = r \times n + u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n = n \times r + u_0$ »
• intialisation : $u_0 = 0 \times r + u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
• transmission : on suppose que pour **un** $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $u_n = n \times r + u_0$. Alors :
$u_{n+1} \overset{\text{def.}}{=\!=} r + u_n \overset{\mathcal{P}(n)}{=\!=} n \times r + u_0 = r \times (n+1)$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = r \times n + u_0$.

Exemple 4. Prouver que pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Suites arithmétiques et géométriques

Définition 2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *arithmétique* de *raison* r si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = r + u_n$.

Propriété 2.

① $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si et seulement si, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r \times n + u_0$.

② $0 + 1 + 2 + \dots n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. ♥

③ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, $\sum u_k = (\text{nb de termes}) \times (\text{moyenne des extrêmes})$

Preuve. ① est démontré dans l'exemple 3, le point ② dans l'exemple 4.□

Exemple 5. Montrer que la somme des n premiers nombres impairs est un carré. ....

....

....

....

Définition 3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *géométrique* de *raison* q si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Propriété 3.

① $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison r si et seulement si, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n \times u_0$.

② si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. ♥

③ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \neq 1$, $\sum u_k = (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$

Preuve. ② : ....

....

....

....

....□

Exemple 6. Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ....

....

Exemple 7. Nature et forme récurrente de la suite (v_n) de l'exemple 1 ? ....

Nature et forme explicite de la suite (w_n) de l'exemple 2 ? ....

3. Variations d'une suite

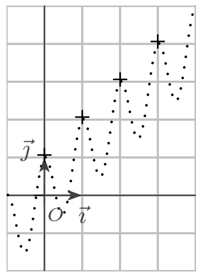
Définition 4. À partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite
- ⋆ *strictement croissante* si et seulement si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
- ⋆ *strictement décroissante* si et seulement si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.
- ⋆ *constante* si et seulement si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

On définit une suite *croissante* ou *décroissante* de même, avec des inégalités larges.

Propriété 4.

La suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ est strictement croissante à partir du rang n_0 si
① pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
② pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
③ pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n = f(n)$ et f strictement croissante sur $[n_0\,;+\infty[$.

Preuve. ① : pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$.
② : si $u_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} > u_n$
③ : si $u_n = f(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$, et $f \nearrow$ sur $[n_0\,;+\infty[$, alors $f(n+1) > f(n) \iff u_{n+1} > u_n$.



Exemple 8. Le dernier critère n'admet pas de réciproque : il se peut que $u_n = f(n)$ où f n'est pas croissante sur $[0, +\infty[$ mais que u soit strictement croissante. Par exemple, soit (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + \cos(2\pi x)$. La courbe de f est représentée ci-contre.
Que dire de f ?...
Simplifier et conclure : $a_n =$...

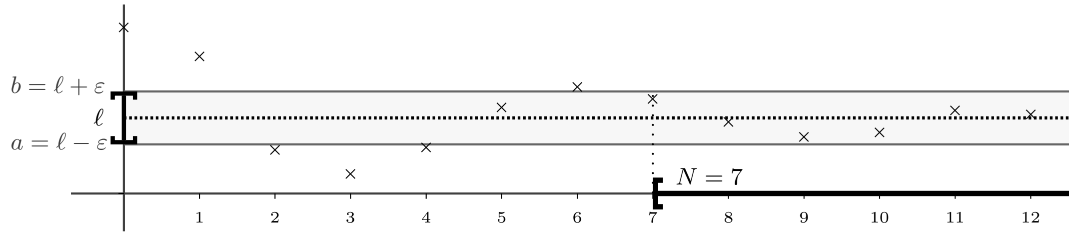
Remarque 2. Des critère analogues existent pour montrer qu'une suite est décroissante ! (par exemple, (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n)

Remarque 3. Essayer de choisir le critère le plus pertinent ! Souvent l'étude d'une suite explicite passera par l'étude de la fonction associée (critère ③), une suite définie à partir de sommes et de différences s'étudiera bien avec le critère ① et une suite définie avec des quotients ou des produits s'étudiera plutôt par le critère ②.

Exemple 9. Sens de variation de (w_n) définie par $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?...........
....
....
Sens de variation de (b_n) définie par $b_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?..............................
....
Sens de variation d'une suite arithmétique (c_n) de raison r ? ....
....
Sens de variation de (u_n) définie par $u_n = 2n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?........................
....
....
....
....

4. Suites convergentes

Définition 5. On dit que la suite (u_n) est *convergente* de limite $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert $]a\,;b[$ contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.
Une suite est *divergente* si elle ne converge pas.



Remarque 4. Pour dire qu'une suite est convergente de limite ℓ, on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Dans la définition, on peut remplacer « pour tout intervalle $]a\,;b[$ contenant ℓ » par « pour tout intervalle ouvert centré en ℓ ». Cette définition s'écrit alors en langage mathématique : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \in\,]\ell - \varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$.
En pratique on utilisera principalement ce résultat pour démontrer des résultats généraux, pour le calcul de limites on utilisera plus souvent des limites de référence.

Exemple 10. Montrer que la suite constante (c_n) définie par $c_n = c \in \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ converge.
....
....
Montrer que (d_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $d_n = \frac{1}{n}$ converge.................
....
....
Montrer que (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est divergente.....................
....
....
....

Théorème 5.

Soient (u_n) et (v_n) convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'.
① la somme $(u_n + v_n)$ est une suite convergente, de limite $\ell + \ell'$.
② le produit $(u_n \times v_n)$ est une suite convergente de limite $\ell \times \ell'$.
③ si $\ell' \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, alors (u_n/v_n) converge vers ℓ/ℓ'.

Idée. L on démontre ces propriétés à l'aide de la définition. Par exemple pour ① : soit $\varepsilon > 0$: comme (u_n) converge vers ℓ, il existe un range N_1 à partir duquel $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Comme (v_n) converge vers ℓ', il existe un range N_2 à partir duquel $\ell' - \frac{\varepsilon}{2} < v_n < \ell' + \frac{\varepsilon}{2}$. À partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, on a en ajoutant les inégalités : $\ell + \ell' - \varepsilon < u_n + v_n < \ell + \ell' + \varepsilon$, ce qui signifie que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.$\square$

Exemple 11. Soit (z_n) définie par $z_n = 3 - \dfrac{2}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer qu'elle converge et calculer sa limite. ....
....

5. Suites de limite infinie

Définition 6. On dit que la suite (u_n) tend vers plus l'infini lorsque n tend vers plus l'infini, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.
En écriture mathématique : $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant N, u_n > A$.
On dit que la suite (u_n) tend vers moins l'infini lorsque n tend vers plus l'infini, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$.

Exemple 12. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$..
....
....

En se basant sur les définitions, on peut prouver les résultats suivants :

5.1. Somme de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	⚠ ? ⚠

5.2. Produit de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	⚠ ? ⚠

5.3. Quotient de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0, $v_n > 0$ pour tout n	0, $v_n < 0$ pour tout n
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Remarque 5. Lorsque la situation est indeterminée, il faut changer l'écriture de la suite pour lever l'indetermination. Une méthode efficace est de forcer la factorisation par le terme qui semble devoir l'emporter.

Exemple 13. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - 3n^2$ ....
....
....

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 - n$ ....
....
....

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1}$ ....
....
....

6. Limite et comparaisons

6.1. Théorème d'encadrement

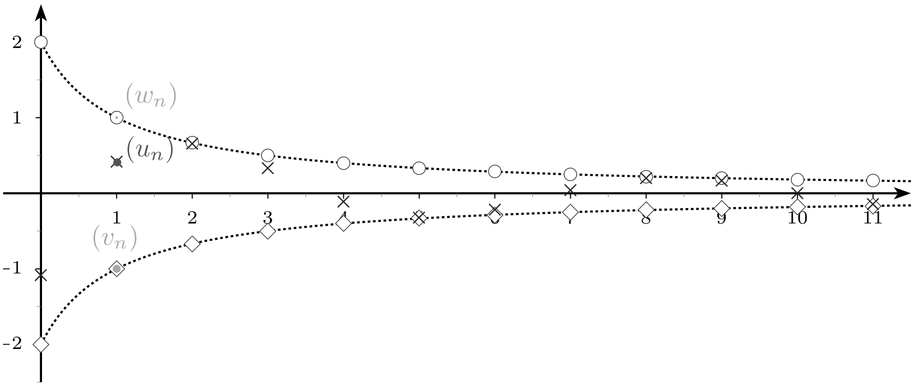
Théorème 6.

① si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ♥

② si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

③ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque 6. Le point ③ est parfois appelé « théorème des gendarmes »



Preuve. ① : on doit prouver que pour tout $A > 0$, il existe un rang N à partir duquel $u_n > A$. Soit $A > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n > A$. Or $u_n > v_n$ donc $u_n > v_n > A$. D'où par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

② : par hypothèse, $-v_n \leqslant -u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} -v_n = +\infty$, donc d'après ①, $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

③ : comme (v_n) et (w_n) convergent vers ℓ, pour tout intervalle $]a, b[$ contenant ℓ, tous les termes de (v_n) à partir d'un certain rang N_1 et tous les termes de (w_n) à partir d'un certain rang N_2 sont dans $]a, b[$. Pour tout $n > N = \max(N_1, N_2)$ on a donc $a < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < b$ donc tous les termes de (u_n) sont dans $]a, b[$ à partir du rang N : (u_n) converge vers ℓ. □

Exemple 14. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n}$? ....

....

....

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + (-1)^n$? ....

....

....

Remarque 7. Les inégalités larges passent à la limite (si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$) mais pas les inégalités strictes. Exemple :

....

....

....

6.2. Limites de q^n selon les valeurs de q

Théorème 7.

① si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. ♥ ② si $-1 \leqslant q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

③ si $q \leqslant -1$, q^n n'a pas de limite. ④ si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

Preuve. ① : soit $x \in]0\,;+\infty]$ montrons par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, « $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ »
• initialisation : $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 = 1 + 0 \times x$ donc la propriété est vraie au rang 0.
• transmission : on suppose la propriété vraie pour un rang n : $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, en multipliant par $1+x$, il vient $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + nx + x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$ car $nx^2 \geqslant 0$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
• Par récurrence, la propriété est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $q > 1$ alors $x = q - 1 > 0$ et on a : $q^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} nx = +\infty$ donc par le théorème de minoration (théorème 6, point ①), $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
② : si $q = 0$, c'est évident (suite constante). Sinon, $\dfrac{1}{|q|} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{|q|^n} = +\infty$, d'où par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
③ : si $q < -1$ alors $|q| > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$: (q^n) ne peut converger. Comme les signes de deux termes consécutifs de (q^n) sont opposés, (q^n) ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$. □

Exemple 15. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ ....

....

....

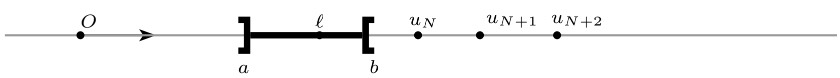
....

6.3. Majoration d'une suite convergente et croissante

Propriété 8.

Une suite (u_n) croissante qui converge vers une limite ℓ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$. ♥

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant \ell$.
Mais alors, si $b = \dfrac{u_N + \ell}{2}$ et $a = \ell - 1$, tous les termes de la suite de rang au moins N sont à l'extérieur de l'intervalle $]a\,;b[$ ce qui contredit la définition 5 de suite convergente.
Par conséquent, l'hypothèse formulée est fausse et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_N \leqslant \ell$. □



7. Suites bornées

Définition 7. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- *minorée* $\iff$ il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$. (m est un minorant)
- *majorée* $\iff$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M \geqslant u_n$. (M est un majorant)
- *bornée* $\iff$ elle est majorée et minorée.

Exemple 16. Que signifie : (u_n) est une suite non majorée ? ....

....

Propriété 9.

Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$. ♥

Preuve. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée ....

....

....

....

.... □

Théorème 10.

Convergence monotone.
Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Idée. une suite croissante ne peut « osciller » ni tendre vers $-\infty$, et une suite majorée ne peut tendre vers $+\infty$: une suite vérifiant ces deux propriétés converge certainement. □

Exemple 17. Donner un exemple de suite :
- croissante qui ne converge pas : ....
- majorée qui ne converge pas : ....

Exemple 18. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;3]$ puis que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{f(u_n)}{u_{n+1} + u_n}$ où $f(x) = 6 + x - x^2$. Étudier les variations puis signe de f sur $[1;3]$, en déduire (u_n) croissante. La suite u est-elle convergente ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....