Chapitre 12 : Géométrie dans l'espace -08-04-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

1. Vecteurs

Définition 1. On appelle *espace vectoriel* réel un ensemble E dont les éléments sont appelés *vecteurs* et muni de deux opérations :

- $\star$ une addition commutative, associative, d'élément neutre $\vec{0}$ (le vecteur nul), et pour laquelle chaque vecteur $\vec{u}$ possède un opposé ($-\vec{u}$, le vecteur de sens contraire)
- $\star$ une multiplication scalaire telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$,
  ① $(\lambda\mu)\,\vec{u} = \lambda\,(\mu\,\vec{u})$ ② $(\lambda+\mu)\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{u}$ ③ $\lambda\,(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$ ④ $1\,\vec{u} = \vec{u}$

Définition 2. Une *combinaison linéaire* d'une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ d'un espace vectoriel E est un vecteur de la forme $\vec{u} = \lambda_1\,\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\,\vec{v}_n$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si l'un est multiple de l'autre ($\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$) ou encore s'il existe une combinaison linéaire nulle $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} = \vec{0}$ avec α, β non tous nuls.

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* si l'un est combinaison linéaire des autres (par exemple $\vec{w} = \alpha u + \beta v$) ou encore s'il existe une combinaison linéaire nulle $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ avec α, β, γ non tous nuls.

De manière générale, une famille de vecteurs est dite *liée* ou *linéairement dépendante* s'il existe une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs, avec des coefficients non tous nuls.

Définition 3. Un ensemble $\mathcal{E}$ est un espace affine, dont les éléments sont appelés des points, lorsqu'un espace vectoriel E agit sur $\mathcal{E}$ par translation :

- $\star$ étant donnés deux points A, B de $\mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que B soit l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$. On note $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et on dit que la flèche droite allant de A vers B est *un représentant* du vecteur $\vec{u}$.
- $\star$ L'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtient par deux translations successives de vecteur $\vec{u}$ puis $\vec{v}$.
- $\star$ La translation de vecteur nul préserve chacun des points de l'espace.

Exemple 1. Le *plan* réel, dans lequel on a l'habitude de travailler, est un espace affine dont l'espace vectoriel associé vérifie :

- $\star$ Étant donné un vecteur $\vec{u}$, il en existe un autre $\vec{v}$ tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
- $\star$ Trois vecteurs quelconques sont toujours coplanaires.

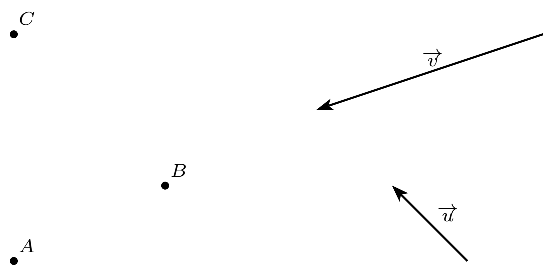
Propriété 1.

Relation de Chasles. Soient trois points A, B et C d'un espace affine $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Preuve. Par définition, C est à la fois l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et par celle de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Par unicité, on obtient le résultat.

Exemple 2. Représenter :

- $\star$ l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$
- $\star$ l'image de B par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\star$ un représentant de $-\vec{u}$
- $\star$ un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$.
- $\star$ G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

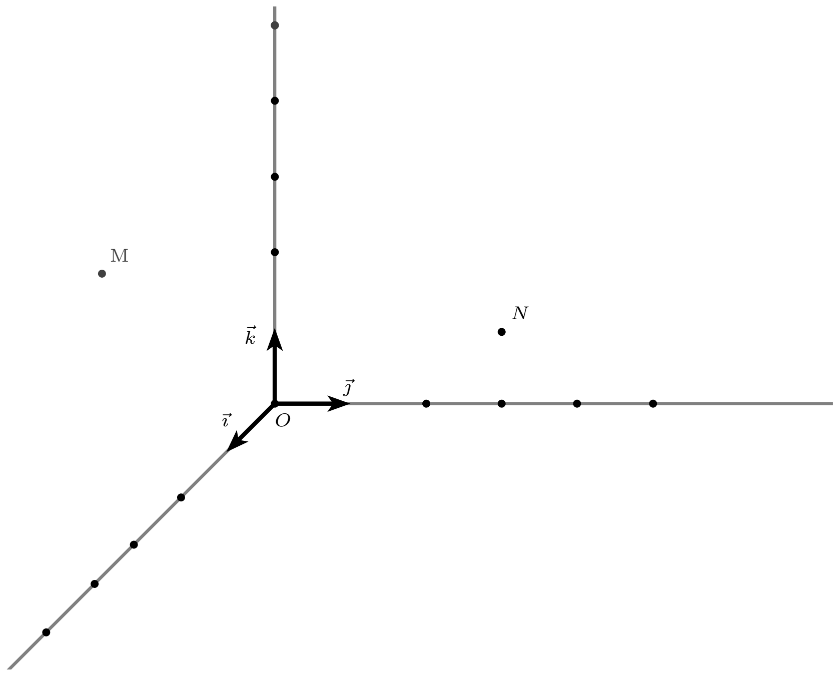


2. L'espace à trois dimensions

Définition 4. L'*espace* réel est un espace affine dont l'espace vectoriel associé vérifie :
- ⋆ Étant donnés deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il en existe un autre $\vec{w}$ tel que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne soient pas coplanaires.
- ⋆ Quatre vecteurs quelconques sont toujours liés.

Remarque 1. Le premier point de la définition 4 assure qu'il existe trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. La donnée d'un point de l'espace O et de trois vecteurs non coplanaires définit un *repère de l'espace*. Si $A \in \mathcal{E}$, le second point de la définition 4 assure qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$. Les nombres x, y, z sont les coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. ($x$ est l'abscisse, y l'ordonnée et z la *cote*).

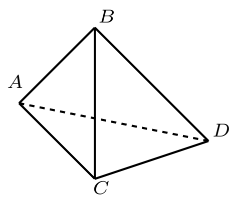
Exemple 3. Placer $P(1;2;3)$. Déterminer les coordonnées de M sachant que $z_M = 3$ et celles de N sachant que $x_N = 0$. Déterminer les coordonnées de Q tel que $PQNM$ soit un parallélogramme.



Théorème 2.

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:
- ⋆ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ⋆ Si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x', y + y', z + z')$.
- ⋆ Si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $\lambda\,\vec{u}$ sont $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- ⋆ Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- ⋆ Si le repère est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- ⋆ Si le repère est orthonormé et $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple 4. L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Montrer que les segments qui joignent les arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent en leurs milieux. (Exprimer les coordonnées des milieux de ces segments en fonctions de celles des sommets)



3. Droites de l'espace

Définition 5. Étant donnés deux points distincts A et B de l'espace, la *droite* (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.
Un vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur directeur* de la droite (AB).
Deux droites ayant des vecteurs directeurs colinéaires sont dites *parallèles*.

Propriété 3.

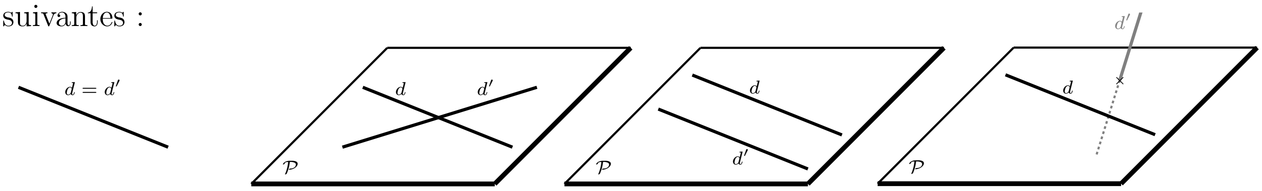
① Si $C, D \in (AB)$ distincts, alors $(AB) = (CD)$.

② Par un point passe une unique parallèle à une droite donnée. (même vecteur directeur)

③ Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

Preuve. ① : comme $C, D \in (ABC)$, il existe des réels t, t' tels que $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = t'\,\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = (t'-t)\,\overrightarrow{AB}$. Or tout point M de (CD) vérifie $\overrightarrow{CM} = k\,\overrightarrow{CD}$ soit $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = k(t'-t)\,\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AM} = (t + k(t-t'))\,\overrightarrow{AB}$ donc $M \in (AB)$: $(CD) \subset (AB)$.
Mais alors $A, B \in (CD)$ et le même raisonnement donne $(AB) \subset (CD)$ d'où $(AB) = (CD)$.
② : l'unique parallèle à d, de vecteur directeur $\vec{u}$, passant par A est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
③ : les vecteurs directeurs des trois droites sont colinéaires.

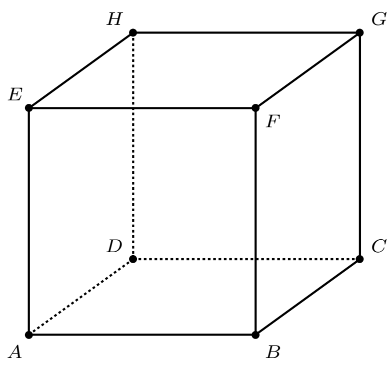
Propriété 4. Deux droites de l'espace d et d' sont dans une et une seule des quatre situations suivantes :



(a) : $d = d'$ parallèles, coplanaires. **(b)** : d et d' *sécantes* $d, d' \subset$ un unique plan. **(c)** : d et d' *parallèles strictes* $d, d' \subset$ dans un unique plan. **(d)** : d et d' non coplanaires ⚠ d et d' ni sécantes, ni parallèles

Preuve. Si d et d' ont au moins deux points d'intersection, elles sont confondues (a), si elles n'en n'ont qu'un, elles sont sécantes (b), si elles n'en n'ont aucun, soit elles sont parallèles (c), soit leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires (d).

Exemple 5. $ABCDEFGH$ est un cube. Citer des couples de droites illustrant la propriété 4 et prouver ces affirmations.



....

....

....

....

....

Définition 6. Étant donnés deux points distincts de l'espace, le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0;1]$.

Exemple 6. Dans l'exemple 5, calculer la longueur du segment $[AG]$ ....

....

Retrouver ce résultat en travaillant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ ....

4. Système d'équations paramétriques d'une droite

Définition 7. *Système d'équations paramétriques d'une droite*
Par définition, M appartient à une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$. Si l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et $M(x; y; z)$, cela équivaut à

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & x_A & + & t\,x_{\vec{u}} \\ y & = & y_A & + & t\,y_{\vec{u}} \\ z & = & z_A & + & t\,z_{\vec{u}} \end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

Méthode 1. *Trouver des équations paramétriques*
Il suffit de connaître un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$: pour une droite (AB), $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ convient, pour une droite d parallèle à d' passant par A, tout vecteur directeur de d' convient.

Exemple 7. Dans l'exemple 5, on considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$. Déterminer un système d'équations paramétrique de (BH), puis de la parallèle d à (BH) passant par G.

....

....

....

Méthode 2. *Trouver des points ou un vecteur directeur à partir des équations paramétriques*
Pour trouver un point à partir du système d'équations paramétriques, il suffit de choisir une valeur du paramètre ($t = 0$ ou $t = 1$ ...) et de calculer les coordonnées x, y, z du point.
Les coordonnées d'un vecteur directeur sont les coefficients du paramètre t dans un système d'équations paramétriques.

Exemple 8. Trouver deux points et un vecteur directeur de $d : \left\{\begin{array}{lll} x & = & -3 \\ y & = & 4 + 2t \\ z & = & -t \end{array}\right.$.

....

Méthode 3. *Vérifier qu'un point appartient à une droite à partir des équations paramétriques.*
Il suffit de résoudre un système de trois équations à une inconnue. La première équation donne une valeur du paramètre t qui doit également vérifier les deux autres équations.

Exemple 9. Dire si $A(-3; 2; -1)$ et $B(-3; 0; 4)$ appartiennent à la droite d de l'exemple 8.

....

....

Méthode 4. *Déterminer la position relative de deux droites.*
Si les droites n'ont pas des vecteurs directeurs colinéaires, elles sont sécantes ou non coplanaires : un point $M(x; y; z)$ appartient à l'intersection de deux droites d et d', si ses coordonnées vérifient les deux systèmes. Cela revient à résoudre un système de trois équations à deux inconnues. On obtient l'intersection (ou un système impossible pour des droites non coplanaires).
⚠ On doit choisir des noms différents pour les deux paramètres (t et t' par exemple).

Exemple 10. Position relative de d (exemple 8) et (MN) où $M(3; 0; 3)$ et $N(0; 3; 1)$?

....

....

....

....

5. Plans de l'espace

Définition 8. Étant donnés trois points non alignés A, B et C de l'espace, le *plan* (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient coplanaires, c'est-à-dire tels qu'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$.
Deux vecteurs non coplanaires formés avec des points de (ABC) forment une *direction* du plan (ABC).
Deux plans confondus ou sans point commun sont dits *parallèles*.
Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite contenue dans le plan.

Propriété 5.

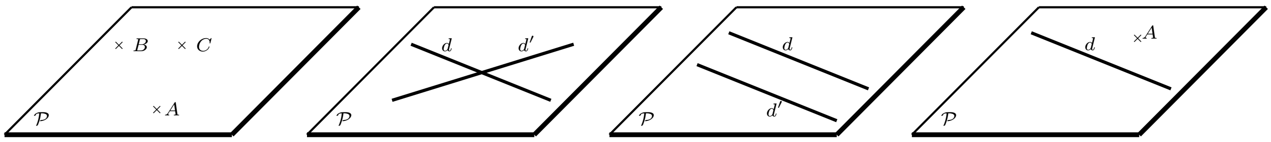
① Si E, F, G sont non alignés et dans un plan (ABC), alors $(ABC) = (EFG)$.

② Si A et B sont deux points distincts d'un plan $\mathcal{P}$, la droite (AB) est contenue dans $\mathcal{P}$.

③ Une droite parallèle à un plan est soit contenue dans le plan, soit à l'extérieur du plan.

Preuve. ① : même type de démonstration que la propriété 3 ①.
② : si $A, B \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = (ABC)$ où C est dans $\mathcal{P}$ et non aligné avec A et B. Ainsi, les points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC}$ décrivent (AB) et sont dans $\mathcal{P}$.
③ : Si $d \mathbin{//} \mathcal{P}$ et d rencontre $\mathcal{P}$ en A, un vecteur directeur de d est un vecteur de $\mathcal{P}$ donc $d \subset \mathcal{P}$.

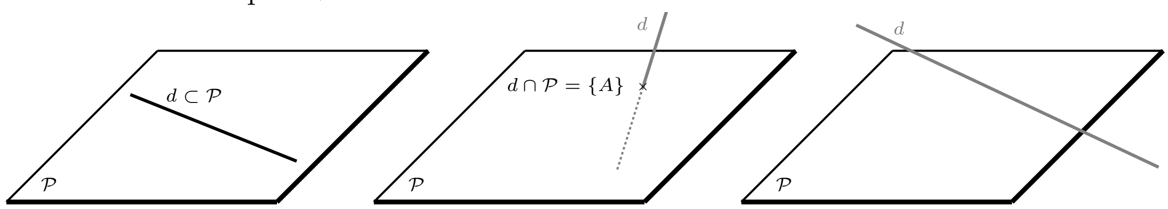
Propriété 6. Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant :



(a) trois points non alignés **(b)** deux droites sécantes **(c)** deux parallèles strictes **(d)** une droite et un point extérieur

Preuve. Dans chaque cas, on peut trouver trois points non alignés et utiliser la propriété 5.

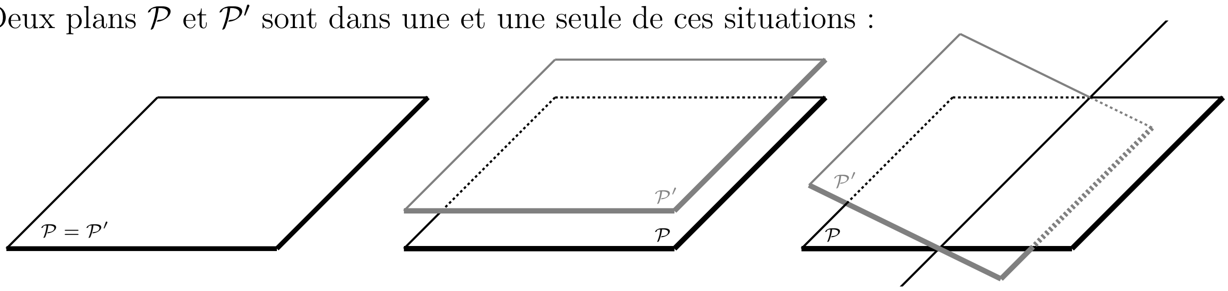
Propriété 7. *Position relative d'une droite et d'un plan*
Une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont dans une et une seule des situations suivantes :



(a) : d contenue dans $\mathcal{P}$ **(b)** : d coupe $\mathcal{P}$ en un point **(c)** : d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$

Preuve. Les situations possibles sont : $\mathcal{P} \cap d$ compte au moins 2, exactement 1, ou 0 points.

Propriété 8. *Position relative de deux plans*
Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dans une et une seule de ces situations :



(a) : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus **(b)** : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles **(c)** : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ = une droite

Preuve. Montrons que $\{A\} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est impossible. Soit d une droite de $\mathcal{P}$ qui ne passe pas par A : si elle coupe $\mathcal{P}'$ en B, la droite (AB) est contenue dans les deux plans. Sinon, d est parallèle à $\mathcal{P}'$ de sorte que la droite parallèle à d passant par A est contenue dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

6. Équation cartésienne d'un plan

Théorème 9.

Soient a, b, c, d réels avec a, b, c non tous nuls. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ dont les coordonnées vérifient l'*équation cartésienne* $ax + by + cz + d = 0$ forment un plan.

Preuve. On suppose $a \neq 0$. Quitte à diviser par a, l'équation équivaut à $x + by + cz + d = 0$. On remarque que $A(-d; 0; 0)$, $B(-b-d; 1; 0)$ et $C(-c-d; 0; 1)$ vérifient l'équation et sont non alignés : $\overrightarrow{AB}(-b; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-c; 0; 1)$ sont non colinéaires. Si $M \in (ABC)$, $\overrightarrow{AM} = y\,\overrightarrow{AB} + z\,\overrightarrow{AC}$, donc $M(-d - by - cz; y; z)$ et $-d - by - cz + by + cz + d = 0$ donc M vérifie l'équation cartésienne. Réciproquement, si $M(x; y; z)$ vérifie l'équation on a bien $x = -d - by - cz$ donc $\overrightarrow{AM} = y\,\overrightarrow{AB} + z\,\overrightarrow{AC}$.

Exemple 11. Donner une équation de (xOy) : .... (xOz) : .... (yOz) : ....
Quelle est la forme d'une équation d'un plan parallèle à (yOz) ? ....

Méthode 5. *Trouver une équation cartésienne du plan (ABC)*
$M(x; y; z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$. On écrit les trois équations paramétriques. Deux de ces équations permettent d'exprimer t et s en fonction de x, y, z. En injectant les expression obtenues dans la dernière équation, on obtient une équation cartésienne.

Exemple 12. Trouver une équation du plan (ABC) où $A(1; 0; 0)$ $B(1; 1; 2)$ et $C(0; -1; 1)$.

....
....
....

Méthode 6. *Trouver l'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une droite d*
On injecte les expressions de x, y, z des équations paramétriques de la droite dans l'équation cartésienne du plan. On obtient une équation à une inconnue, que l'on résout.
(pas de solution : $d \,//\, \mathcal{P}$, une infinité : $d \subset \mathcal{P}$, une seule : c'est le paramètre de l'intersection).

Exemple 13. Intersection du plan (ABC), exemple 12, et de (EF) : $E(0; 1; 0)$ et $F(0; 2; 1)$?

....
....
....

Méthode 7. *Trouver l'intersection de deux plans*
On écrit les deux équations cartésiennes et on choisit une coordonnée comme paramètre (par exemple $x = t$). On remplace dans les deux autres équations et on isole les autres coordonnées.

Exemple 14. Intersection du plan (ABC), exemple 12 et de $\mathcal{P}$: $y + z = 0$?

....
....
....

Méthode 8. *Intersection de trois plans*
On commence par déterminer l'intersection de deux plans (méthode 7) puis l'intersection du résultat (souvent une droite) avec le dernier plan (méthode 6)

Exemple 15. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$, (ABC) (exemple 14) et (xOy).

7. Produit scalaire

Définition 9. On considère que l'espace est muni d'une distance.
- ⋆ La norme d'un vecteur est la longueur de ses représentants : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.
- ⋆ Le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- ⋆ Deux droites sécantes sont *perpendiculaires* si elles forment un angle droit.
- ⋆ Deux droites sont *orthogonales* si l'une admet une parallèle perpendiculaire à l'autre.
- ⋆ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions orthogonales sont *orthogonaux* : $\vec{u}\perp\vec{v}$.
- ⋆ Un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$est *orthogonal* si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 10.

$\vec{u}\perp\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de Pythagore.

Propriété 11.

Autres écritures du produit scalaire. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$,

① si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.

② si $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u};\vec{v})$.

Preuve. ① : exprimer $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$, $||\vec{u}+\vec{v}||$ en fonction de x,y,z.
② : choisir un repère orthonormé tel que $\vec{\imath}$ soit de même sens que $\vec{u}$ et $\vec{\jmath}$ soit coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Passer en coordonnées polaires.

Exemple 16. Dans le cube ABCDEFGH de l'exemple 5, les droites (EC) et (BG) sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?

....

....

....

Théorème 12.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel λ, on a les propriétés de
- ⋆ Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- ⋆ Homogénéité : $\vec{u},\vec{v}$, $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$
- ⋆ Bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{w})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- ⋆ Positivité : $||u||^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}\geqslant 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

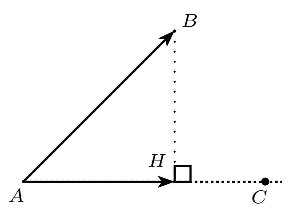
Preuve. La symétrie est évidente, l'homogénéité, la bilinéarité et la positivité se prouvent en écrivant chaque membre en coordonnées cartésiennes.

Propriété 13.

Soient A et C deux points distincts de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

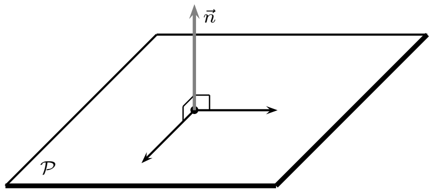
Pour $\vec{u}$ vecteur directeur unitaire (norme 1) de (AC) : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \pm AH$.



Exemple 17. Dans l'exemple 5, coordonnées du projeté orthogonal H de A sur (DH) ?

8. Orthogonalité

Définition 10. Un *vecteur normal* $\vec{n} \neq \vec{0}$ d'un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non coplanaires du plan.
Par bilinéarité du produit scalaire, $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plans.



Propriété 14.

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c sont non tous nuls.
Le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

Preuve. Soient $A(x;y;z)$ et $B(x';y';z')$ deux points de $\mathcal{P}$. On a donc $ax+by+cz+d=0$ et $ax'+by'+cz'=0$ d'où par différence $a(x'-x)+b(y'-y)+c(z'-z)=0 \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \iff \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$: $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

Exemple 18. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P} : y+z=0$: ....

Méthode 9. *Déterminer l'équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal*
Si $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ et passe par A, il a pour équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c sont les coordonnées de $\vec{n}$ et où d est déterminé en remplaçant x, y, z par les coordonnées de A.

Exemple 19. Équation du plan $\mathcal{P}'$ de vecteur normal $\vec{n}(2;-1;0)$ passant par $K(1;1;1)$?

....

Méthode 10. *Critères d'orthogonalité et de parallélisme*
Deux plans sont perpendiculaires si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux orthogonaux.
Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux colinéaires.
Deux droites sont orthogonales si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
Une droite et un plan sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan sont colinéaires. ⚠
Une droite et un plan sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan sont orthogonaux. ⚠

Exemple 20. Éq. paramétriques de la perpendiculaire à $\mathcal{P} : y+z=0$ contenant $K(1;1;1)$?

....

Équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'''$ parallèle à $\mathcal{P}'' : x-2y+z=0$ passant par $A(1;0;0)$?

....

Équation cartésienne du plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'''$ passant par $A(1;0;0)$?

....

Définition 11. Le *plan médiateur* d'un segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à $[AB]$ passant par son milieu. C'est l'ensemble des points équidistants de A et B.

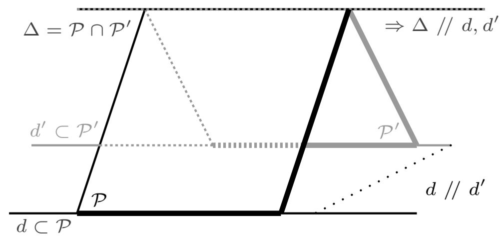
Exemple 21. Équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$: $A(1;2;3)$ et $B(-1;0;-1)$?

....

9. Position relative de trois plans

Théorème 15.

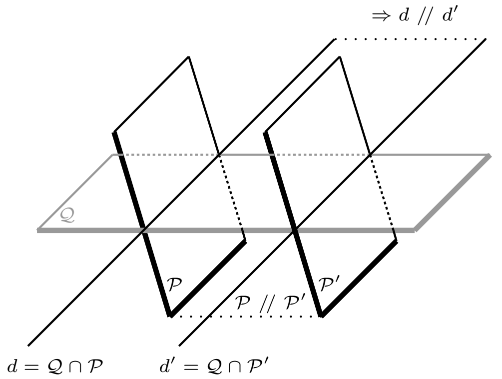
Théorème du toit ♥ .
Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants, deux droites parallèles $d \subset \mathcal{P}$ et $d' \subset \mathcal{P}'$. Alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite parallèle à d et d'.



Preuve. Comme $d \ // \ d'$, elles ont un vecteur directeur commun $\vec{u}$. Les plans étant sécants, leur intersection est une droite Δ de vecteur directeur $\vec{v}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étaient non colinéaires, ils dirigeraient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, qui seraient alors parallèles : contradiction. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\Delta \ // \ d, d'$.

Théorème 16.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles.
Si $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants suivant une droite d, alors $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite d', et les droites d et d' sont parallèles.



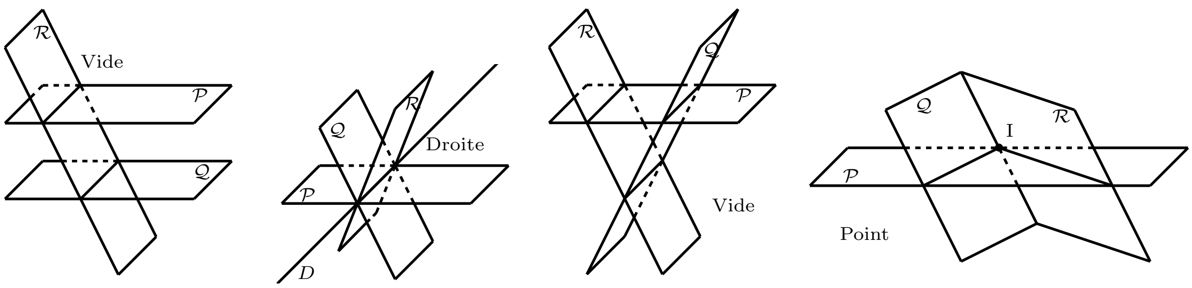
Preuve. $\mathcal{P}'$ et Q sont sécants (sinon $\mathcal{P}' \ // \ Q$ et $\mathcal{P}' \ // \ \mathcal{P}$ impliquerait $\mathcal{P} \ // \ \mathcal{Q}$). Soit A un point d'intersection de $\mathcal{P}'$ et d' la parallèle à d passant par A. Comme $d \subset \mathcal{P} \ // \ \mathcal{P}'$ et $A \in \mathcal{P}'$, on a : $d' \subset \mathcal{P}'$. Comme $d \subset \mathcal{Q}$ et $A \in \mathcal{Q}$, on a : $d' \subset \mathcal{Q}$: $d' = \mathcal{P}' \cap Q$.

Remarque 2. *Position relative de trois plans*
Trois plans sont dans l'une des situations suivantes :

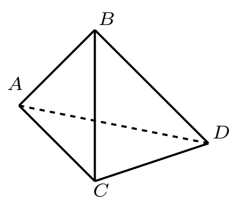
⋆ Si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, ils sont soit strictement parallèles (deux à deux d'intersection vide), soit confondus pour deux d'entre eux et strictement parallèles au troisième (propriété 8 b) soit tous les trois confondus (propriété 8 a)

⋆ Si leurs vecteurs normaux sont coplanaires et non colinéaires, ils sont soit confondus pour deux d'entre eux et sécants aux troisième (propriété 8 c), soit parallèles pour deux d'entre eux et le troisième sécant aux deux autres suivants des droites parallèles (théorème 16), soit tous trois sécants suivants une même droite, soit deux à deux sécants suivant des droites parallèles (théorème 15).

⋆ Si leurs vecteurs normaux sont non coplanaires, l'intersection est réduite à un point.



Exemple 22. Soient I, J, K, L, M les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[BD]$.
Montrer que $(IJ) \ // \ (LK)$, que $(IJK) \ // \ (BD)$, que $(IJM) \ // \ (ACD)$ et $d \ // \ d'$ où $d = (IJM) \cap (BCL)$ et $d' = (ACD) \cap BCL)$



10. Solides

10.1. Section plane d'un solide

Méthode 11. Pour déterminer l'intersection d'un *polyèdre* (solide composé de plusieurs faces) et d'un plan, on procède face par face en

① cherchant deux points communs entre le plan de coupe et le plan contenant la face étudiée. Pour cela, on prolongera parfois les arêtes de la face étudiée et les droites d'intersection des faces étudiées auparavant. (exemples 23 et 24).

② cherchant un point commun entre la face étudiée et le plan de coupe, et en utilisant le théorème 16, si on connaît déjà l'intersection du plan de coupe avec une face parallèle à la face étudiée. (voir l'exemple 23).

③ cherchant un point commun entre la face étudiée et le plan de coupe, et en utilisant le théorème 15, si l'on sait que l'intersection du plan de coupe et d'une face autre face est parallèle à une droite de la face étudiée. (voir l'exemple 24).

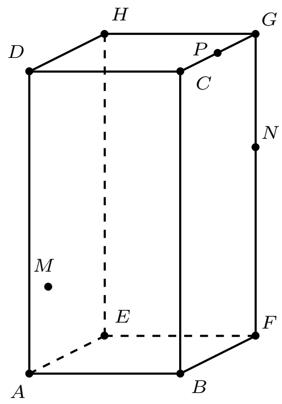
Exemple 23. Représenter la section du parallélépipède suivant par le plan (MNP), sachant que $M \in (AED)$, $N \in [GF]$ et $P \in [CG]$. On justifiera soigneusement l'intersection de (MNP) avec la face $AEDH$.

....

....

....

....



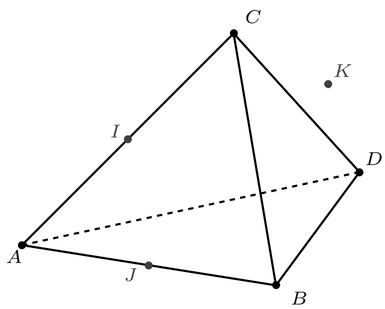
Exemple 24. Représenter l'intersection du tétraèdre avec le plan (IJK), en justifiant soigneusement l'intersection de (IJK) avec la face (BCD). Le point I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[AB]$, enfin $K \in (BCD)$:

....

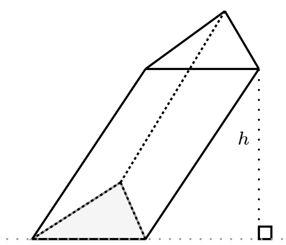
....

....

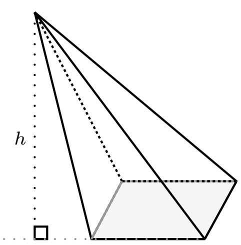
....



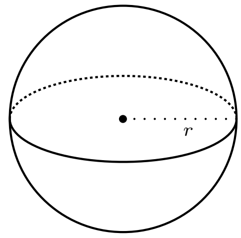
10.2. Volumes de solides



Prisme, cylindre : $V = B \times h$



Pyramide, cône : $V = \frac{1}{3}B \times h$



Sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$