CHAPITRE 11 : LOIS CONTINUES -19-03-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

1. Notion de densité

Définition 1. Une *densité de probabilité* f sur un intervalle $I = [a;b]$ est une fonction continue et positive sur I, telle que : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 1$.

Exemple 1. Déterminer k afin que $f : x \mapsto k\,x^2$ soit une densité de probabilité sur $[0;1]$.

....

....

Définition 2. Une variable aléatoire X à valeurs dans $I = [a;b]$ suit la loi de probabilité de densité f lorsque pour tout nombres α et β de I on a : $\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$.
Dans ce cas, la variable aléatoire X est dite *continue*.

Exemple 2. Dans le cas d'un variable aléatoire qui suit la loi de densité f de l'exemple 1,
$\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4}) =$ ....
$\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}) =$ ....

Propriété 1.

Soit X une variable aléatoire continue et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

① $\mathbb{P}(X > \alpha) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant \alpha)$ ② $\mathbb{P}(X = \alpha) = 0$ ③ $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$

Preuve. Dans le cas d'une densité f sur un intervalle $[a;b]$, pour $a \leqslant \alpha \leqslant \beta < b$.
$1-\mathbb{P}(X \leqslant \alpha) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - \int_a^\alpha f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_\alpha^a f(x)dx = \int_\alpha^b f(x)dx = \mathbb{P}(X > \alpha)$.
On a : $\mathbb{P}(X = \alpha) = \mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \alpha) = \displaystyle\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$ d'où vient aussi le dernier résultat.

Définition 3. L'*espérance* $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a;b]$ de densité f sont définis par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b xf(x)dx \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \sigma(x) = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$$

L'espérance s'interprète comme la valeur moyenne de la variable aléatoire X.
La *médiane* d'une variable aléatoire X est la valeur m telle que $\mathbb{P}(X \leqslant m) = 0{,}5$.

Exemple 3. Dans le cas d'un variable aléatoire qui suit la loi de densité f de l'exemple 1,
$\mathbb{E}(X) =$ ....
Médiane : ....

....

Remarque 1. Les définitions de ce paragraphe s'étendent au cas d'une densité définie sur un intervalle ouvert, quitte à utiliser des limites : voir en particulier les paragraphes 3. et 4.

2. Loi uniforme $\mathcal{U}[a;b]$

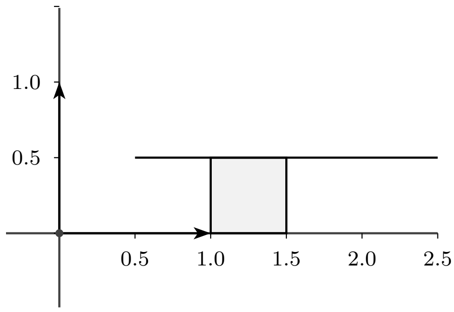
Théorème 2.

♥ Soient $a < b$ deux réels. La fonction constante $[a;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ est une densité.
On dit qu'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité $\dfrac{1}{b-a}$ suit la *loi uniforme sur* $[a;b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a;b]$.
On a alors, pour α et β deux réels de $[a;b]$: $\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Preuve. la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ sur $[a;b]$ est continue et positive ($b > a$). De plus, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$. Donc f est bien une densité.
Ainsi, $\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$ ....
et $\mathbb{E}(X) =$ ....
....

Remarque 2. C'est la loi suivie par la variable aléatoire égale à un nombre choisi au hasard entre a et b avec « les mêmes chances » d'obtenir chaque résultat. La calculatrice permet de simuler une variable aléatoire suviant la loi $\mathcal{U}[0;1]$ via `NbrAléat` (menu MATH, sous-menu `PRB`).

Exemple 4. Si $X \sim \mathcal{U}[0{,}5;2{,}5]$, on a :
$\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5) =$ ....
Comment simuler X à la calculatrice ? ....
....
Comment simuler $X \sim \mathcal{U}[a;b]$? ....
....



Exemple 5. Soit T le temps d'attente (en minutes) à un arret de bus , on suppose que T suit la loi uniforme uniforme sur $[0;15]$.
Quelle est la probabilité que vous attendiez entre 7 et 12 minutes ?
....
....

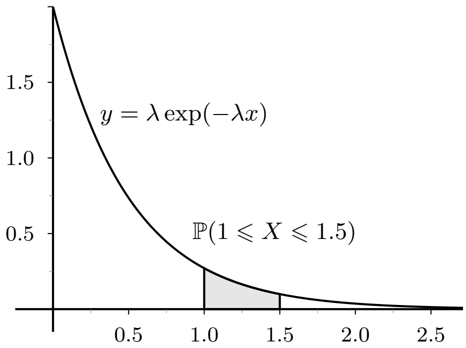
Exemple 6. On veut modéliser la durée de vie sans panne d'un type de téléviseur par une variable aléatoire X suivant loi uniforme X sur $[0;M]$. On sait que 16% de ces téléviseurs tombent en panne avant leur premier anniversaire.
Calculer la valeur de M qui doit être prise, puis l'espérance de vie d'un tel téléviseur.
....
....
....
....

Remarque 3. Si $X \sim \mathcal{U}[a;b]$, on a $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ et la médiane de X est $\dfrac{a+b}{2}$.

3. Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Théorème 3.

♥ Soit $\lambda > 0$ un réel. La fonction $f_\lambda : [0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \lambda e^{-\lambda}$ est une densité.
On dit qu'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité f_λ qu'elle suit la *loi exponentielle de paramètre* λ et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
Pour α et β deux réels positifs : $\mathbb{P}(X \in [\alpha; \beta]) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.



Preuve. $\displaystyle\int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.
Ainsi $\displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$: f_λ est une densité,
et on obtient immédiatement $\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$.
On remarque que $(xe^{-\lambda x})' = -\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}$,
D'où : $\displaystyle\int_0^\beta (xe^{-\lambda x})' dx = -\int_0^\beta x f_\lambda(x) dx + \int_0^\beta e^{-\lambda x} dx$

Donc : $\displaystyle[xe^{-\lambda x}]_0^\beta = -\int_0^\beta x f_\lambda(x) dx + \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\beta \iff \int_0^\beta x f_\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda\beta}}{\lambda} - \beta e^{-\lambda\beta}$.
Ainsi, $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta x f_\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda}$ (limite usuelle et croissance comparée).

Exemple 7. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant t) = e^{-\lambda t}$ ....

....

Exemple 8. La durée de vie X du téléviseur de l'exemple 6 suit maintenant une loi exponentielle de paramètre λ. Il tombe en panne la première année dans 16% des cas.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de λ.

....

Donner la durée de vie moyenne de ce type de téléviseur ....

Donner la durée de vie médiane de ce type de téléviseur ....

....

Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 2)$ et $\mathbb{P}_{X \geqslant 3}(X \geqslant 5)$. Que remarque-t-on ? ....

....

....

Théorème 4.

♥ On dit que la variable aléatoire continue X suit une *loi de durée de vie sans vieillissement* lorsque $\mathbb{P}_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \mathbb{P}(X \geqslant h)$. La variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Preuve. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, d'après l'exemple 7, $\mathbb{P}(X \geqslant h) = e^{-\lambda h}$, $\mathbb{P}(X \geqslant t + h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $\mathbb{P}(X \geqslant h) = e^{-\lambda t}$. Comme $(X \geqslant t + h) \cap (X \geqslant t) = (X \geqslant t + h)$,
$$\mathbb{P}_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \frac{\mathbb{P}((X \geqslant t + h) \cap (X \geqslant t))}{\mathbb{P}(X \geqslant t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = \mathbb{P}(X \geqslant h)$$
La variable aléatoire X suit donc une loi « sans vieillissement ».
On admet la réciproque : si X suit une loi sans vieillissement, X suit une loi exponentielle.

4. Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

Définition 4. Une variable aléatoire X, discrète ou continue, est *centrée réduite* si son espérance est nulle et son écart-type vaut 1 : $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

Théorème 5.

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité.

On dit qu'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité f qu'elle suit la *loi normale centrée réduite*. On a en effet : $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sigma(X) = 1$.
La parité de f implique $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = 0{,}5$: la médiane de X est nulle.

Preuve. On admet que f est une densité : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \lim\limits_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ (voir TP 8).
On a : $\int_\alpha^\beta x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_\alpha^\beta$. (forme $u'e^u$ avec $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$)
Or $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ d'où $\mathbb{E}(X) = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \lim\limits_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta x f(x) dx = 0$. On admet que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1$.

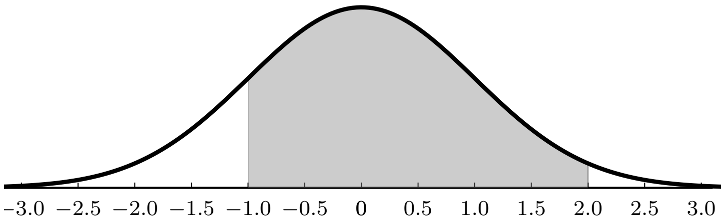
Méthode 1. ⚠ la difficulté principale de la loi centrée réduite est que l'on ne sait pas exprimer de primitive de f à l'aide des fonctions usuelles. Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, on estimera la probabilité $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$ (où $a < b$ réels), à l'aide de la fonction `normalFRép(a,b,0,1)` du menu $\boxed{\text{Distr}}$ de la calculatrice.
Pour estimer numériquement $\mathbb{P}(a \leqslant X)$ on peut remplacer b par un nombre important (20), ou écrire $\mathbb{P}(a \leqslant X) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant 0) + \mathbb{P}(0 \leqslant X) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant 0) + 0{,}5$ si $a < 0$, par exemple.

Exemple 9. Soit $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

$\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 2) \approx$....................

$\mathbb{P}(0 \leqslant X) =$.........................

$\mathbb{P}(X > 3) =$.........................



Exemple 10. Pourquoi $\mathbb{P}(X \leqslant -u) = \mathbb{P}(X \geqslant u) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant u)$? ....
En déduire : $\mathbb{P}(-u \leqslant X \leqslant u) = 2\mathbb{P}(X \leqslant u) - 1$ ....

....

Théorème 6.

♥ Soit une variable X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ et $\alpha \in]0;1[$.
Il existe un unique réel positif u_α tel que $\mathbb{P}(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Preuve. Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ u \mapsto \mathbb{P}(-u \leqslant X \leqslant u) = 2 \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} du = \int_0^u \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} du$.
f est une primitive d'une fonction strictement positive, donc est strictement croissante et continue. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} f(u) = 1$. Or pour tout $\alpha \in]0;1[$, on a : $1 - \alpha \in]0;1[$.
D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $u_\alpha \in [0;+\infty[$ tel que $f(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Exemple 11. Calculer $u_{0{,}05}$ et $u_{0{,}01}$ à 10^{-2} près : utiliser l'exemple 10 et la calculatrice, `FracNormale(p,0,1)` dans $\boxed{\text{Distr}}$ donne u tel que $\mathbb{P}(X \leqslant u) = p$, où $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

....

....

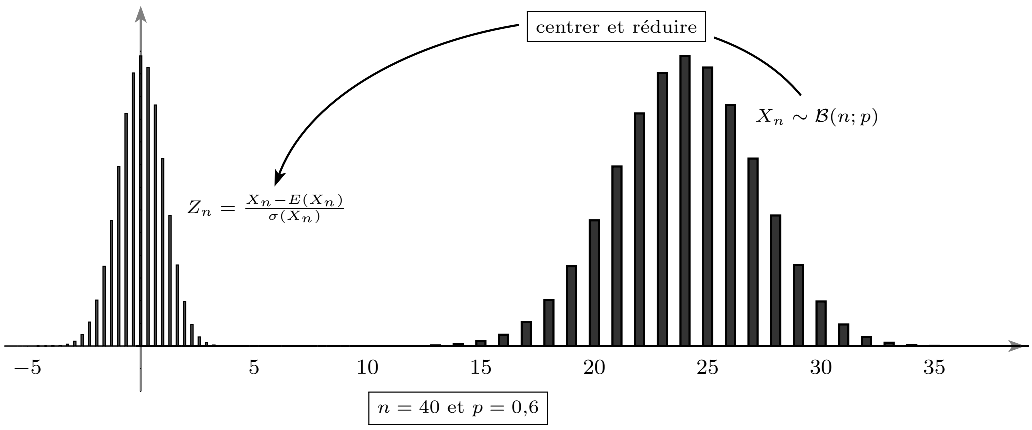
5. Théorème de Moivre-Laplace

Propriété 7.

Soit X une variable aléatoire, discrète ou continue, et Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$. Alors Y est une variable aléatoire centrée réduite : $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$.

Remarque 4. On admet que les propriétés de l'espérance et de la variance démontrées au chapitre 3 (exemple 8) sont encore valables pour les variables continues :
$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X)\right) = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X) - \frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma} = 0$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\frac{1}{\sigma}X - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X)) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1$.

Remarque 5. Centrer-réduire une variable aléatoire qui suit la loi binomiale : $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$ $n \geqslant 1$ entier et $p \in]0; 1[$, et on sait que $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)} = \sqrt{np(1-p)}$.
donc $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est centrée réduite.

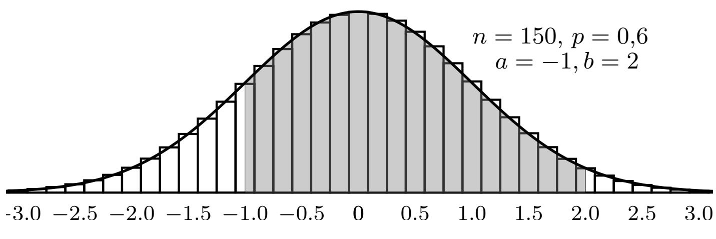


Théorème 8.

Moivre-Laplace. Soit $p \in]0; 1[$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$ et la variable aléatoire centrée réduite Z_n correspondante (voir la remarque 5).
Soient α et β deux réels, $\alpha < \beta$. On a

$$\mathbb{P}(\alpha \leqslant Z \leqslant \beta) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) \quad \text{où} \quad Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

Remarque 6. Ce théorème signifie que, pourvu que n soit suffisamment grand, on peut estimer $\mathbb{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b)$ par $\mathbb{P}(a \leqslant Z \leqslant b)$.
Il est admis, voir le TP 8 pour une approche empirique.



Exemple 12. On lance indépendamment 400 fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de résultats « face » et $\tilde{X}$ la variable aléatoire centrée réduite correspondante.
Montrer que $\mathbb{P}(190 \leqslant X \leqslant 220) = \mathbb{P}(-1 \leqslant \tilde{X} \leqslant 2)$. Estimer alors $\mathbb{P}(190 \leqslant X \leqslant 220)$:

....

....

....

6. Lois normales $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Définition 5. Une variable aléatoire X suit *la loi normale de paramètres* (μ,σ^2) lorsque la variable aléatoire $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. On note : $X\sim\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
Si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0;1)$ alors $X\sim\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Théorème 9. Si X suit la loi normale de paramètres (μ,σ^2) alors $\mathbb{E}(X)=\mu$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=\sigma^2$.

Remarque 7. De même que pour la loi normale centrée réduite, la densité de la loi normale n'a pas de primitive que l'on peut exprimer avec les fonctions usuelles. Si $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, une valeur approchée de $\mathbb{P}(a\leqslant X\leqslant b)$ est donnée par `normalFRép(`a,b,μ,σ`)`.

Exemple 13. Soit $k>0$ et $X\sim\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Prouver $\mathbb{P}(\mu-k\sigma\leqslant X\leqslant\mu+k\sigma)=\mathbb{P}(-k\leqslant Y\leqslant k)$ où $Y\sim\mathcal{N}(0;1)$ ....

....

En déduire à 0,01 près ♥ : $\mathbb{P}(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx$ ....
$\mathbb{P}(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx$.................. $\mathbb{P}(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx$..................

Exemple 14. On suppose que la variable aléatoire X associant à une vache d'un cheptel sa production laitière annuelle suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ avec $\mu=6000$ et $\sigma=400$.

① Quelle est la probabilité qu'une vache prélevée au hasard produise annuellement :

(a) entre 5900 et 6100 litres ? (b) moins de 5500 litres ? (c) plus de 6250 litres ?

....

....

....

② Donner un intervalle centré sur μ qui contient la production annuelle de lait d'une vache de ce cheptel avec une probabilité de 0,95.

....

....

③ Quel niveau de production annuelle de lait une vache prise au hasard dans le cheptel dépassera-t-elle avec une probabilité égale à 0,2 ?

....

....

Exemple 15. On souhaite modéliser la durée de vie d'un appareil par une variable aléatoire $X\sim\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Déterminer μ et σ d'après les deux spécifications suivantes : 80% des appareils ont une durée de vie entre 120 et 200 jours et 5% de la production a une durée de vie inférieure à 120 jours.

....

....

....

7. Fluctuations d'échantillonnage

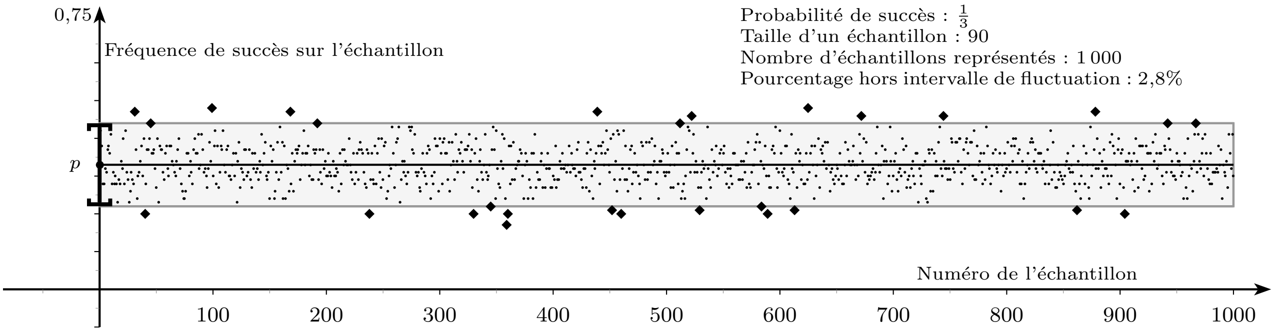
Définition 6. Un *échantillon* de taille n est la liste des résultats d'un schéma de Bernoulli de paramètres $(n;p)$. (répétition de n expériences à deux issues, de probabilité de succès p, identiques et indépendantes).

La *fréquence observée* des résultats d'un échantillon de taille n est $f = \dfrac{\text{nombre de succès}}{n}$

Remarque 8. si $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$, la variable aléatoire égale à la fréquence est $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Définition 7. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres $(n;p)$. Un intervalle I est un *intervalle de fluctuation au seuil* de $1-\alpha$ si $\mathbb{P}(F_n \in I) \geqslant 1-\alpha$: la probabilité que l'intervalle contienne la fréquence de succès d'une série d'expériences est d'au moins $1-\alpha$. Lorsqu'il est centré sur p, l'intervalle est dit *centré*.

Exemple 16.



Théorème 10.

♥ Pour $n \geqslant 1$ entier, soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$.
Soit $\alpha \in]0;1[$ et u_α l'unique réel tel que $\mathbb{P}(Y \in [-u_\alpha; u_\alpha]) = 1-\alpha$ où $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \in \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$$

L'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est l'*intervalle de fluctuation asymptotique*, au seuil de $1-\alpha$, et centré sur p, de la fréquence de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres $(n;p)$.

Preuve. On a : $\mathbb{P}(F_n \in I_n) = \mathbb{P}\left(X_n \in \left[np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)}; np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right]\right)$ donc $\mathbb{P}(F_n \in I_n) = \mathbb{P}\left(\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \in [-u_\alpha; u_\alpha]\right)$ qui a pour limite $1-\alpha$ d'après le théorème de 8.

Remarque 9. Pour $n \geqslant 30$, $pn \geqslant 5$ et $(1-p)n \geqslant 5$, on considérera que $\mathbb{P}(F_n \in I_n) \approx 1-\alpha$.

Théorème 11. ♥ pour n assez grand, $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \in [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]\right) \geqslant 0{,}95$.

Preuve. pour $\alpha = 0{,}05$, $u_\alpha = 1{,}96$ et $p(1-p)$ est a pour maximum $\frac{1}{4}$, d'où $1{,}96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1$, $I_n \subset [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. D'où $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \in [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]) \geqslant \mathbb{P}(F_n \in I_n) \geqslant 0{,}95$. si n grand.

Exemple 17. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique centré de la fréquence des résultats « 6 » pour un échantillon de 100 lancés de dés équilibrés.

....

8. Intervalle de confiance

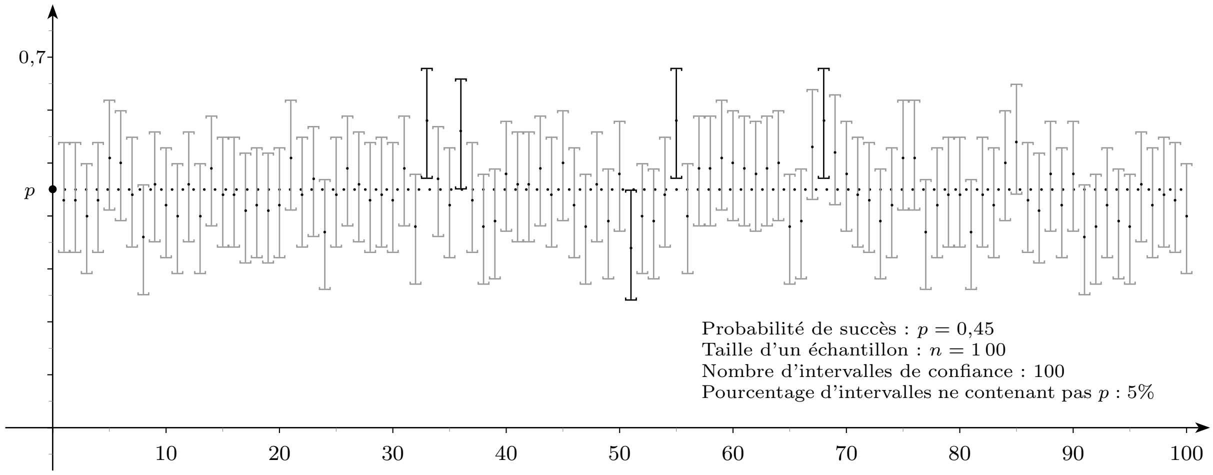
Théorème 12.

Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$ et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$. Pour n assez grand, $\mathbb{P}\left(p \in \left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$

Preuve. On a : $p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \iff F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p$ et $p \leqslant F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \iff F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + p$ et $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \iff F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Ainsi, d'après le théorème 11,
$\mathbb{P}\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$ pour n assez grand.

Définition 8. On la fréquence observée f des succès lors de la réalisation d'un schéma de Bernoulli de paramètres $(n;p)$ où p est inconnu.
On dit que $I_{95\%} = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un *intervalle de confiance* au seuil de 0,95.

Remarque 10. Le nombre p appartiendra à 95% des intervalles de confiance ainsi obtenus.



Exemple 18. Avant le second tour d'une élection présidentielle, on effectue deux sondages sur des échantillons représentatifs de la population. On ne retient que les suffrages exprimés, c'est-à-dire les personnes qui ont l'intention de voter pour l'un ou l'autre des candidats.

⋆ le premier sondage concerne 1 003 personnes qui votent à 53,1% pour le candidat A.

⋆ le seconde sondage concerne 9 851 personnes qui votent à 51,2% pour le candidat A.

Lequel de ces sondages permet d'affirmer, au seuil de confiance de 95%, que le candidat A va l'emporter ?

....

....

....

....